



‘समानो मन्त्रः समितिः समानी’

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 1st Semester Examination, 2021

DSC1/2/3-P1-MATHEMATICS

CALCULUS AND GEOMETRY

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক

1. Answer any **four** questions from the following: 3×4 = 12
নিম্নলিখিত যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
- (a) Determine the asymptotes of the following curve: 3

$$x = \frac{t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2+2}{1+t}$$
 $x = \frac{t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2+2}{1+t}$ -বক্ররেখাটির asymptote গুলি নির্ণয় কর।
- (b) Find the envelope of circles described on the radii vectors of the parabola $y^2 = 4ax$ as diameter. 3
 $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের ব্যাসার্ধ ভেক্টরকে বৃত্তের ব্যাস ধরলে যে সকল বৃত্ত পাওয়া যায় তাদের পরিস্পর্শক (envelope)-টি নির্ণয় কর।
- (c) Find the equation of the cylinder which intersects the curve $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ and whose generators are parallel to z -axis. 3
একটি চোঙের সমীকরণ নির্ণয় কর যেটি $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ বক্ররেখাটিকে ছেদ করে এবং যার generator গুলি z -অক্ষের সমান্তরাল।
- (d) Determine the inflexion points for the function $f(x) = x^4 - 24x^2 + 11$. 3
 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 11$ অপেক্ষকটির পথচ্যুতি বিন্দু (inflexion point) গুলি নির্ণয় কর।
- (e) Find $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \tan x}{x^3} \right)$. 3
নির্ণয় করঃ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \tan x}{x^3} \right)$
- (f) Find the angle of rotation of the axes for which the equation $x^2 - y^2 = a^2$ will reduce to $xy = c^2$. Determine c^2 . 3
Co-ordinate অক্ষদ্বয়কে কত কোণে ঘোরালে $x^2 - y^2 = a^2$ সমীকরণটি $xy = c^2$ -এ রূপান্তরিত হবে। c^2 -এর মান নির্ণয় কর।

GROUP-B / বিভাগ-খ

2. Answer any **four** questions from the following: 6×4 = 24
 নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Prove that the enveloping cylinder of the surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ whose generators are parallel to the line $\frac{x}{0} = \frac{y}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z}{c}$ meet the plane $z = 0$ in circles. 6

প্রমাণ কর $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ পৃষ্ঠতলের স্পর্শক চোঙ (enveloping cylinder) যার generator গুলি $\frac{x}{0} = \frac{y}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z}{c}$ সরলরেখার সমান্তরাল, $z = 0$ তলকে ঐ তলের বৃত্ত বরাবর ছেদ করে।

(b) Show that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$ touch each other externally. Find the point of contact. 6

প্রমাণ কর $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$ গোলক দ্বয় পরস্পরকে বাহ্যিকভাবে স্পর্শ করে। এছাড়াও স্পর্শবিন্দুগুলি নির্ণয় কর।

(c) Trace the curve: $(x^2 - 1)(y^2 - 4) = 4$ 6
 $(x^2 - 1)(y^2 - 4) = 4$ বক্ররেখাটির trace-টি উল্লেখ কর।

(d) If $y = \frac{\log x}{x}$, prove that 6

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \left[\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} \right]$$

যদি $y = \frac{\log x}{x}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \left[\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} \right]$$

(e) (i) Find the point of inflexion on the curve $r = a\theta^{1/n}$. 3+3 = 6
 $r = a\theta^{1/n}$ বক্ররেখাটির পথচ্যুতি বিন্দু (point of inflexion) গুলি নির্ণয় কর।

(ii) Prove that the abscissa of the points of inflexion of the curve $y^n = f(x)$ satisfy the equation

$$(n-1) \{f'(x)\}^2 = n f(x) f''(x)$$

প্রমাণ কর $y^n = f(x)$ বক্ররেখার পথচ্যুতি বিন্দুগুলির ভূজাঙ্ক (abscissa) গুলি $(n-1) \{f'(x)\}^2 = n f(x) f''(x)$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(f) Show that the graph of the equation $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 64 = 0$ is a hyperbola and find its foci and vertices. 6

দেখাও যে $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 64 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি পরাবৃত্ত হবে। উক্ত পরাবৃত্তের নান্দী (foci) এবং শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any two questions

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

3. (a) Obtain reduction formula for

4

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad (n \neq 1)$$

$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad (n \neq 1)$ -এর লঘুকরণ সূত্র (reduction formula)-টি নির্ণয় কর।

(b) Find a reduction formula for $\int \sin^m x \cos^n x dx$, where m and n are natural

4+4 = 8

numbers. Hence find a reduction formula for $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$. Now use the

formula to evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^6 x dx$.

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ -এর লঘুকরণ সূত্র (reduction formula)-টি নির্ণয় কর যেখানে m এবং n হল

স্বাভাবিক সংখ্যা। ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$ -এর লঘুকরণ সূত্রটি নির্ণয় কর। উক্ত সূত্রটির

সাহায্যে $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^6 x dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

4. (a) If $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$, prove that

4

$$p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$$

যদি $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ হয়, তাহলে দেখাও যে

$$p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$$

(b) If $y = x \log \frac{x-1}{x+1}$, prove that

4

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n (n-2)! \left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n} \right]$$

যদি $y = x \log \frac{x-1}{x+1}$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n (n-2)! \left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n} \right]$$

(c) Find the evolute of the curve $x = at^2$, $y = 2at$. (Assume that the evolute is the envelope of normals).

4

$x = at^2$, $y = 2at$ বক্ররেখাটির কেন্দ্রজ (evolute)-টি নির্ণয় কর। (ধরে নাও কেন্দ্রজ হল অভিলম্বের পরিস্পর্শক (envelope)).

5. (a) Find the eccentricity and semi-latus rectum of the conic $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$. 4

$r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$ -কণিকটির উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) এবং অর্ধ-নাভিলম্বটি (semi-latus rectum) নির্ণয় কর।

- (b) Prove that the curve $y = \log x$ ($x > 0$) is everywhere convex upwards. Discuss concavity or convexity with respect to the axis of x . 4

প্রমাণ কর $y = \log x$ ($x > 0$) বক্ররেখাটি উর্ধ্বাভিমুখী উত্তল। x -অক্ষের সাপেক্ষে উত্তলতা বা অবতলতা আলোচনা কর।

- (c) Prove that the eight points of intersection of the asymptotes of the curve $xy(x^2 - y^2) + a(x^2 + y^2) - a^3 = 0$ with the curve lie on a circle whose centre is at the origin. 4

প্রমাণ কর $xy(x^2 - y^2) + a(x^2 + y^2) - a^3 = 0$ বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবণরেখা (asymptote) গুলি বক্ররেখাটিকে আটটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং উক্ত বিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থান করে যার কেন্দ্রবিন্দু হল মূলবিন্দু।

6. (a) If the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ makes intercepts a , b and c on the coordinate axes, prove that 4

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ গোলকের কোন স্পর্শকতল অক্ষত্রয়কে যথাক্রমে a , b এবং c অংশে ছেদ করলে দেখাও যে

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

- (b) Find the equation of the right circular cone formed by rotating the line $2y + 3z = 6$, $x = 0$ about z -axis. 4

z -অক্ষের সাপেক্ষে $2y + 3z = 6$, $x = 0$ সরলরেখাটিকে ঘূর্ণনের ফলে যে right circular cone-টি তৈরী হয় তার সমীকরণটি নির্ণয় কর।

- (c) Discuss the nature of the curve $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ by reducing it to its canonical form. 4

$x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ বক্ররেখাটির সমীকরণকে স্বভাবী আকারে (canonical form) প্রকাশ করে বক্ররেখাটির প্রকৃতি আলোচনা কর।

—x—