



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2021

SEC2-P1-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

The question paper contains SEC2A and SEC2B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

SEC2A

Probability and Statistics

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer any *four* questions from the following

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Let A and B be two events. Then prove that $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 3

যে-কোন দুটি ঘটনা A ও B -র জন্য প্রমাণ কর $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ।

- (b) Prove that the following properties: $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$

নীচের সূত্রগুলি প্রমাণ করঃ

(i) $P(\bar{A} + \bar{B}) = 1 - P(AB)$

(ii) $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A) + P(B) + P(AB)$

- (c) Find the value of k for which 2+1

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

is a probability density function. Also find the value of $P(X > \frac{1}{2})$.

ধ্রুবক k -এর মান বের কর যার জন্যে

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। এক্ষেত্রে $P(X > \frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর।

- (d) If the regression lines are $x + 6y = 6$ and $3x + 2y = 10$, find the mean and the correlation coefficient. 3
 নির্ভরণ সরলরেখা দুটি $x + 6y = 6$, $3x + 2y = 10$ হলে গড়গুলি ও সহগতি সহগাঙ্ক নির্ণয় কর।
- (e) Find the mean of binomial $(4, \frac{1}{4})$ variate. 3
 দ্বিপদ $(4, \frac{1}{4})$ নিবেশনের গড় নির্ণয় কর।
- (f) Prove that $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. 3
 প্রমাণ কর $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ ।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer any *four* questions from the following

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) Prove that $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

প্রমাণ কর $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ ।

- (b) Find the minimum number of times a die has to be thrown such that the probability of no six is less than $1/2$.

ন্যূনতম কতবার একটি ছক্কা ছোড়া হলে ছয় না পড়ার সম্ভাবনা $1/2$ -এর চেয়ে কম?

- (c) The distribution function $F(x)$ of a variate X is defined as follows:

$$F(x) = \begin{cases} A & ; -\infty < x < -1 \\ B & ; -1 \leq x < 0 \\ C & ; 0 \leq x < 2 \\ D & ; 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

where A, B, C, D are constant. Determine the value of A, B, C, D , it being given that $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ and $P(X > 1) = \frac{2}{3}$.

একটি নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ -এর সংজ্ঞা হল

$$F(x) = \begin{cases} A & ; -\infty < x < -1 \\ B & ; -1 \leq x < 0 \\ C & ; 0 \leq x < 2 \\ D & ; 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

যেখানে A, B, C, D ধ্রুবক। A, B, C, D -র মান নির্ণয় কর যদি জানা থাকে যে $P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X > 1) = \frac{2}{3}$, যেখানে X চালকের নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ ।

- (d) If X is Poisson distributed with parameter μ , then prove that

যদি X পোয়াস μ -চলক হয়, তবে প্রমাণ কর

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

where n is any positive integer.

যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

- (e) The joint density function of X and Y is given by

2+2+2=6

$$f(x, y) = Kxy \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < x)$$

Find the value of K . Also find the marginal density functions.

ধ্রুবক K -এর মান নির্ণয় কর যার জন্য

$$f(x, y) = Kxy \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < x)$$

একটি সম্ভাব্য দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক হয়। প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় কর।

- (f) (i) Let A and B be two events such that $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$ and $P(A/B) = \frac{1}{4}$.

4+2

Find $P(\bar{A}/\bar{B})$ and $P(A/B) + P(A/\bar{B})$.

ধরুন A এবং B দুটি ঘটনা যেখানে $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A/B) = \frac{1}{4}$ । তাহলে

$P(\bar{A}/\bar{B})$ এবং $P(A/B) + P(A/\bar{B})$ -এর মান নির্ণয় কর।

- (ii) Find the median for the Poisson distribution having mean 2.

যদি Poisson distribution-এর mean 2 হয় তাহলে ইহার median টি নির্ণয় কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any *two* questions from the following

12×2=24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

3. (a) Show that acute angle θ between the least square regression lines is given by

6+3+3

$$\tan \theta = \frac{1 - \rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

and discuss the case $\rho = 0$ and $\rho = \pm 1$.

দেখাও যে লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ সরলরেখা দুটির মধ্যে সূক্ষ্মকোণ θ হলে

$$\tan \theta = \frac{1 - \rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

$\rho = 0$ এবং $\rho = \pm 1$ হলে θ -এর মান ও তার ব্যাখ্যা কী?

- (b) (i) State and prove the Tchebycheff's inequality.

(2+4)+6

চেবিশেফের অসমতার কথা বল ও প্রমাণ কর।

- (ii) The distribution of a random variable X is given by

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{4}$$

Verify Tchebycheff's inequality for this distribution.

একটি বিচ্ছিন্ন চলক X -এর নিবেশনে

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{4}$$

এই নিবেশনের জন্য চেবিশেফের অসমতা যাচাই কর।

- (c) (i) State and prove Bayes' theorem. (2+4)+6

ব্যেজের উপপাদ্যটি লিখুন ও বর্ণনা কর।

- (ii) There are three identical urns containing white and black balls. The first urn contains 2 white and 3 black balls, the second urn 3 white and 5 black balls, and the third urn 5 white and 2 black balls. An urn is chosen at random, and a ball is drawn from it. If the ball drawn is white, what is the probability that the second urn is chosen?

তিনটি একরকম পাত্রে সাদা ও কালো বল আছে। প্রথমটিতে ২টি সাদা ও ৩টি কালো, দ্বিতীয়টিতে ৩টি সাদা ও ৫টি কালো এবং তৃতীয়টিতে ৫টি সাদা ও ২টি কালো বল আছে। একটি পাত্র যদৃচ্ছভাবে নির্বাচন করা হল এবং তার থেকে একটি বল টানা হল। বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে দ্বিতীয় পাত্রটি নির্বাচন করার সম্ভাবনা কত?

- (d) (i) Probability density function of a random variable X be (2+2+2+2)+4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-x/40} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the values of $P(X \leq 15)$, $P(40 < X \leq 50)$, $P(X > 10)$, $P(-\infty < X < 0)$.

একটি চলক X -এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-x/40} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

এক্ষেত্রে মান নির্ণয় কর

$P(X \leq 15)$, $P(40 < X \leq 50)$, $P(X > 10)$, $P(-\infty < X < 0)$

- (ii) If X be a $\beta_2(l, m)$ variate then show that $Y = \frac{1}{X}$ is a $\beta_2(m, l)$ variate.

যদি X একটি $\beta_2(l, m)$ চলক হয়, তাহলে $Y = \frac{1}{X}$ একটি $\beta_2(m, l)$ চলক।

SEC2B

Differential Geometry

GROUP-A / বিভাগ-ক

1. Answer any **four** questions from the following: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) For the curve $r = [3u, 3u^2, 2u^3]$, show that $\frac{1}{K} = \frac{1}{\tau} = \frac{3}{2}(1 + 2u^2)^2$.

$r = [3u, 3u^2, 2u^3]$ এই বক্রের জন্য দেখাও যে $\frac{1}{K} = \frac{1}{\tau} = \frac{3}{2}(1 + 2u^2)^2$ ।

- (b) Show that for a circular helix, the principal normal is perpendicular to the generators of the cylinder.

একটি বৃত্তাকার helix-এর জন্য দেখাও যে, প্রধান অভিলম্বটি চোঙের generators গুলোর উপর লম্ব হবে।

(c) Show that the surface $e^z \cos x = \cos y$ is minimal.

প্রমাণ কর যে $e^z \cos x = \cos y$ পৃষ্ঠতলটি সর্বনিম্ন হবে।

(d) Find the envelope of the family of planes $3xa^2 - 3ay + z = a^3$.

$3xa^2 - 3ay + z = a^3$ সমতলগুলোর envelope নির্ণয় কর।

(e) For a given curve $r = r(u)$, show that $\kappa = \frac{\sqrt{|\dot{r}|^2 - \dot{s}^2}}{\dot{s}^2}$, s is a parameter ($\cdot \equiv \frac{d}{du}$).

$r = r(u)$ (u একটি প্যারামিটার) বক্রটির জন্য দেখাও যে, $\kappa = \frac{\sqrt{|\dot{r}|^2 - \dot{s}^2}}{\dot{s}^2}$, যেখানে s একটি প্যারামিটার ও ' \cdot ' $\equiv \frac{d}{du}$ ।

(f) Find \hat{t} , \hat{n} for the curve $r = (a \cos u, b \sin u, 0)$.

নিম্নলিখিত বক্রের জন্য স্পর্শক ও অভিলম্ব (\hat{t} , \hat{n}) ভেক্টরের মান নির্ণয় করঃ

$$r = (a \cos u, b \sin u, 0)$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Prove that the asymptotic lines are orthogonal if and only if the surface is minimal. Find the asymptotic lines on the surface $z = y \sin x$.

3+3

প্রমাণ কর যে, অসীম রেখাগুলি (asymptotic lines) সমকোণীয় (orthogonal) হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি পৃষ্ঠতলটি সর্বনিম্ন হয়। $z = y \sin x$ পৃষ্ঠতলের উপর অসীম রেখাগুলি নির্ণয় কর।

(b) Find the arc length of the curve $x = 3 \cosh 2t$, $y = 3 \sinh 2t$, $z = 6t$ from $t = 0$ to $t = \pi$.

3+3

Find the parametric representation of $x^3 + y^3 + 3xy = 0$.

$x = 3 \cosh 2t$, $y = 3 \sinh 2t$, $z = 6t$ বক্রের $t = 0$ থেকে $t = \pi$ পর্যন্ত বক্রের চাপ দৈর্ঘ্য (arc length) নির্ণয় কর। $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ এর প্যারামেট্রিক উপস্থাপনা নির্ণয় কর।

(c) Show that the radius of spherical curvature of a circular helix $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = a\theta \cot \alpha$ is equal to the radius of circular curvature.

3+3

If R is the radius of the spherical curvature, show that $R = \left| \frac{\hat{t} \times \hat{t}''}{\kappa^2 \tau} \right|$.

দেখাও যে, একটি বৃত্তাকার helix $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = a\theta \cot \alpha$ -এর গোলাকার বক্রতার ব্যাসার্ধ, বৃত্তাকার বক্রতার ব্যাসার্ধের সমান। প্রমাণ কর $R = \left| \frac{\hat{t} \times \hat{t}''}{\kappa^2 \tau} \right|$, যেখানে R গোলাকার বক্রতার ব্যাসার্ধ চিহ্নিত করে।

(d) Find the involutes and evolutes of the curves $r = [a \cos u, a \sin u, au \tan \alpha]$.

3+3

$r = [a \cos u, a \sin u, au \tan \alpha]$ বক্রের involutes এবং evolutes নির্ণয় কর।

- (e) For any curve $r = r(s)$, prove that $r''' = -\kappa^2 \hat{t} + \kappa' \hat{n} + \kappa \tau \hat{b}$. Hence show that 3+3
- $$\hat{b} = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}.$$

$r = r(s)$ একটি বক্র। প্রমাণ কর যে, $r''' = -\kappa^2 \hat{t} + \kappa' \hat{n} + \kappa \tau \hat{b}$ যেখানে ‘ \cdot ’ $\equiv \frac{d}{ds}$ এবং
প্রমাণ কর যে, $\hat{b} = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}$ ।

- (f) Find the parametric direction and angle between parametric curves. 3+3
প্যারামেট্রিক বক্রগুলির মধ্যে প্যারামেট্রিক দিক এবং কোণ নির্ণয় কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2=24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) (i) Show that the curve $r = r(s)$ is asymptotic line if and only if $\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dN}{ds} = 0$, (4+2)+
(4+2)

where N is surface normal. Write the necessary and sufficient condition for a curve to be a geodesic.

দেখাও যে $r = r(s)$ বক্রটি অসীম রেখা হবে যদি এবং কেবলমাত্র $\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dN}{ds} = 0$ হয়, যেখানে N পৃষ্ঠতল অভিলম্ব। একটি বক্র, geodesic হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় কর।

- (ii) Find the necessary and sufficient condition for a surface $z = f(x, y)$ to represent a developable surface. Prove that the surface $xy = (z - c)^2$ is developable.

একটি পৃষ্ঠ $z = f(x, y)$, একটি developable পৃষ্ঠ হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় কর।
প্রমাণ কর যে, $xy = (z - c)^2$ পৃষ্ঠটি developable।

- (b) (i) Define first fundamental form. Prove that the first fundamental form is invariant under a transformation of parameters. (1+5)+
(5+1)

প্রথম মৌলিক গঠনের (first fundamental form) সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, প্রথম মৌলিক গঠনটি, প্যারামিটারের রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তীয়।

- (ii) If (l, m) and (l', m') are the direction coefficients of two directions at a point

$$P, \text{ then show that } \tan \theta = \frac{H(lm' - ml')}{Ell' + F(lm' + ml') + Gmm'}.$$

Define normal curvature.

যদি একটি বিন্দু P এর উপর (l, m) এবং (l', m') দুটি দিকের (direction) দিক সহগ

$$(\text{direction coefficients}) \text{ হয়, তাহলে দেখাও যে, } \tan \theta = \frac{H(lm' - ml')}{Ell' + F(lm' + ml') + Gmm'}$$

নরম্যাল বক্রতার (normal curvature) সংজ্ঞা দাও।

- (c) (i) Define osculating plane, rectifying plane. Find the osculating plane at the point t on the helix $r = (a \cos t, a \sin t, ct)$. (2+4)+(4+2)

Osculating সমতল ও rectifying সমতলের সংজ্ঞা দাও। $r = (a \cos t, a \sin t, ct)$ helix এর কোন বিন্দু t এর জন্য osculating সমতল নির্ণয় কর।

- (ii) Find the normal curvature of the right angular helicoid $x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$ at a point on it. State the Serret-Frenet formulae.

$x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$ right angular helicoid-এর উপর কোন একটি বিন্দুতে নরম্যাল বক্রতার মান নির্ণয় কর। Serret-Frenet-এর ফরমূলাটি লেখ।

- (d) (i) Find the principal directions and the principal curvature on the surface $x = a(u + v), y = b(u - v), z = uv$. 6+(4+2)

পৃষ্ঠ $x = a(u + v), y = b(u - v), z = uv$ এর উপর প্রধান দিক (principal directions) এবং প্রধান বক্রতা (principal curvature) নির্ণয় কর।

- (ii) Prove that the curves $\frac{v^3}{u^2} = \text{constant}$ are geodesics on a surface with metric

$$v^2 du^2 - 2uv du dv + 2u^2 dv^2 \quad (u > 0, v > 0).$$

State Rodrigue's formula.

প্রমাণ কর যে, $v^2 du^2 - 2uv du dv + 2u^2 dv^2 \quad (u > 0, v > 0)$ মেট্রিকযুক্ত পৃষ্ঠের geodesic

গুলি হল $\frac{v^3}{u^2} = \text{ধ্রুবক}$ বক্রসমষ্টি।

Rodrigue -এর ফরমূলা লেখ।

—x—