



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**  
B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2021

**DSE1/2/3-P1- MATHEMATICS**

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.  
All symbols are of usual significance.*

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.  
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.  
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

**DSE-1A**

**MECHANICS**

**GROUP-A / বিভাগ-ক**

**Answer any *four* questions from the following**

**3×4 = 12**

**নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও**

1. (a) What are the forces that can be Omitted from the equation of Virtual work?  
Virtual work-এর সমীকরণ হতে কি কি বল বাদ দেওয়া যেতে পারে ?
- (b) A particle describes a curve whose equation  $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$  under a force to the pole.  
Find the law of force.  
একটি কণা মেরুর দিকে (pole) এক কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে  $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$  বক্রপথে চলমান। তাহলে বলের সূত্রটি নির্ণয় কর।
- (c) Define escape velocity. Find its approximate value when  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  and  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$  where  $R$  is the radius of the Earth's orbit.  
মুক্তিবেগ বলতে কি বোঝ ? যদি  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  এবং  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$  পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ হলে মুক্তিবেগের আনুমানিক মানটি নির্ণয় কর।
- (d) What do you mean by a system is in astatic equilibrium under a system of coplanar forces.  
কোন একটি তন্ত্র একটি সমতলীয় বলতন্ত্রে অস্থির সাম্যবস্থায় (astatic equilibrium) আছে বলতে কি বোঝ ?
- (e) Prove that centre of Suspension and Oscillation of a compound pendulum are convertible.  
মিশ্র গোলক (Compound pendulum)-এর প্রলম্বন বিন্দু (centre of suspension) এবং দোলন বিন্দু (centre oscillation) দ্বয় বিনিমেয়।

- (f) Write down the relation between pitch and wrench. What happen when pitch is zero and infinite respectively?

Pitch এবং wrench-এর মধ্যে সম্পর্কটি উল্লেখ কর। যদি pitch-এর মান শূন্য এবং অসীম হয় তবে কি ঘটবে ?

**GROUP-B / বিভাগ-খ**

**Answer any four questions from the following**

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) A particle describes an ellipse of eccentricity  $e$  about a centre of force at a focus. When the particle is at one end of a major axis its velocity is doubled. Prove that the new path is a hyperbola of eccentricity  $\sqrt{9-8e^2}$ . 4
- $e$  উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট কোন একটি নাভি অভিমুখী কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে চলমান। কণাটি পরাক্ষের একপ্রান্তে পৌঁছলে ইহার গতিবেগ দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর নতুন কক্ষপথটি  $\sqrt{9-8e^2}$  উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট পরাবৃত্ত।
- (b) Find the moment of momentum of the body about the fixed axis. 2
- কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোন বস্তুর কৌণিক ভরবেগটি নির্ণয় কর।
3. A sphere of weight  $W$  and radius  $a$  lies within a fixed spherical shell of radius  $b$  and a particle of weight  $w$  is fixed to the upper end of the vertical diameter. Prove that the equilibrium is stable if  $\frac{W}{w} = \frac{(b-2a)}{a}$ . 6
- $b$  ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলাকার খোলক (Shell) এর ভেতর  $W$  ওজন এবং  $a$  ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলক আছে। এছাড়াও উক্ত গোলকের উল্লম্ব ব্যাসের উর্ধ্বতন বিন্দুতে  $W$  ওজনের একটি কণা স্থায়ীভাবে রয়েছে। প্রমাণ কর সাম্যাবস্থাটি স্থিতিশীল হবে যদি  $\frac{W}{w} = \frac{(b-2a)}{a}$  হয়।
4. (a) Three forces  $P, Q, R$  act along the sides of the triangle formed by the lines  $x+y=1, y-x=1, y=2$ . Find the equation of the line of action of their resultant. 4
- $x+y=1, y-x=1, y=2$  সরলরেখার দ্বারা নির্মিত একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর যথাক্রমে  $P, Q, R$  বলগুলি কাজ করে। ইহাদের লব্ধিবলের সমীকরণটি নির্ণয় কর।
- (b) Write down the equation of motion relative to the centre of Inertia. 2
- জড়তা বিন্দু (Centre of Inertia) এর সাপেক্ষে গতির সমীকরণটি উল্লেখ কর।
5. Find the centroid of the volume formed by the revolution of the cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  about the  $x$ -axis. 6
- $r = a(1 + \cos \theta)$  cardioid টিকে  $x$  অক্ষের সাপেক্ষে ঘোরালে যে খণ্ড (volume) তৈরী হয় তার ভরকেন্দ্রটি নির্ণয় কর।
6. State and prove the principle of virtual work. 6
- Virtual work-এর নীতিটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

7. (a) Prove that in a central orbit, the sectorial area traced out by the radius vector through the centre of force to the particle per unit time is constant. 3

প্রমাণ কর কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল কোন কণার উপর কেন্দ্রীয় বল বরাবর ব্যাসার্ধ ভেক্টরটি একক সময়ে যে ক্ষেত্রটি গমন করে তা ধ্রুবক হয়।

- (b) Find the equation of path when mass =  $M$  units and position of the particle is moving in space at any instant  $t$  is 3

$$(a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3)$$

শূন্যে চলমান  $M$ -একক ভরের কোন কণা যে-কোনো তাৎক্ষণিক  $t$  সময়ে অবস্থান  $(a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3)$  হলে কণাটির পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

### GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

8. (a) A force  $P$  acts along the axis of  $x$  and another force  $nP$  acts along a generator of the cylinder  $x^2 + y^2 = a^2$ . Show that the central axis lies on the cylinder 6

$$n^2(nx-1)^2 + (1+n^2)^2y^2 = n^4a^2$$

একটি বল  $P$ ,  $x$  অক্ষ বরাবর এবং অপর একটি বল  $nP$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$  চোঙের একটি generator বরাবর কাজ করে। দেখাও যে কেন্দ্রীয় অক্ষটি (central axis)  $n^2(nx-1)^2 + (1+n^2)^2y^2 = n^4a^2$  চোঙের অবস্থান করে।

- (b) Deduce the condition of stability of an orbit which is nearly circular under the action of a central force  $F = \phi(u)$ , where  $u = \frac{1}{r}$ . 6

$F = \phi(u)$  যেখানে  $u = \frac{1}{r}$  কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে প্রায় গোলাকার কোন কক্ষপথের স্থিতিশীলতার শর্তগুলি উল্লেখ কর।

9. (a) A particle is projected with velocity  $u$  at an inclination  $\alpha$  above the horizontal in a medium whose resistance per unit mass is  $k$  times the velocity. Show that its direction will again makes angle ' $\alpha$ ' below the horizontal after a time  $\frac{1}{k} \log(1 + \frac{2ku}{g} \sin \alpha)$ . 6

একটি কণাকে অনুভূমিক হইতে  $\alpha$  কোণে  $u$  গতিবেগে ওপরে কোনো এক মাধ্যমে ছোড়া হল, যেখানে মাধ্যমের বাধা প্রতি একক ভরে গতিবেগের  $k$  গুণ। দেখাও যে  $\frac{1}{k} \log(1 + \frac{2ku}{g} \sin \alpha)$  সময় পর কণাটির অভিমুখ অনুভূমিক হইতে  $\alpha$  কোণে নিচের দিকে হইবে।

- (b) State and prove the principle of conservation of energy under impulsive force. 4

ঘাত বল (Impulsive force)-এর অধীনস্থ শক্তির নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

- (c) Express the kinetic energy of a rigid body moving about a fixed axis. 2

কোন নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে চলমান কোন দৃঢ়বস্তুর (Rigid body) গতিশক্তির মান নির্ণয় কর।

- 10.(a) Obtain the velocity and acceleration of a moving particle referred to rectangular axes  $OX$  and  $OY$  which are not fixed in space but rotate about the origin in their own plane. 6  
 শূন্যে স্থায়ী নয় কিন্তু মূলবিন্দুর সাপেক্ষে নিজস্ব তলে ঘুরতে সক্ষম আয়তক্ষেত্রাকার অক্ষদ্বয়  $OX$  এবং  $OY$ -এর সাপেক্ষে কোন একটি চলমান কণার গতিবেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।
- (b) Show that for a system of equilibrium under conservative forces, the potential energy is minimum for stable and maximum for unstable equilibrium. 6  
 রক্ষণশীল বলের অধীনস্থ কোন একটি সাম্যাবস্থাতন্ত্রে দেখাও যে বিভব শক্তি (Potential energy) সর্বনিম্ন হয় যখন সাম্যাবস্থাটি স্থিতিশীল থাকে এবং সর্বোচ্চ হয় তখন অস্থিতিশীল থাকে।
- 11.(a) Let  $AB$  be a rod with two different weights  $Wa$  and  $Wb$  are suspended from two ends respectively. If  $AB$  makes an angle  $\theta$  with the vertical, then prove that 6  

$$\tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$$
 ধর  $AB$  একটি রড যার দুই প্রান্তে দুটি ভিন্ন ওজন  $Wa$  এবং  $Wb$  ঝোলানো আছে। উল্লম্বের সাথে  $AB$  রডটি  $\theta$  কোণ করলে প্রমাণ কর  $\tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$ ।
- (b) A sphere is projected with an underhand twist down a rough inclined plane; show that it will turn back in the course of its motion if  $2a\omega(\mu - \tan \alpha) > 5\mu u$ , where  $u$ ,  $\omega$  are the initial linear and angular velocity of the sphere,  $\mu$  is the coefficient of friction and  $\alpha$  is the inclination of the plane. 6  
 একটি অমসৃণ নততলে একটি গোলককে হাত না ঘুরিয়ে আবর্তিতবস্থায় ছোড়া হল। দেখাও যে গোলকটি তার আগের গতিপথে ফিরে আসবে যদি  $2a\omega(\mu - \tan \alpha) > 5\mu u$ , যেখানে  $u$ ,  $\omega$  যথাক্রমে গোলকের প্রাথমিক ও কৌণিক বেগ,  $\mu$  হল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক এবং  $\alpha$  হল নততলের নতি।

### DSE-1B

#### GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

#### GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer any *four* questions from the following

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. Determine whether the permutation

1+2=3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

is even or odd. Also find its order as an element of  $S_8$ .

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$  বিন্যাসটি যুগ্ম হবে না অযুগ্ম হবে তা নির্ণয় কর। এছাড়াও  $S_8$ -এর

উপাদান (element) হিসেবে উক্ত বিন্যাসের ক্রম (order) নির্ণয় কর।

2. Find the dimension of the row-space of the matrix 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির Row space -এর মাত্রা (dimension) নির্ণয় কর।

3. Let  $G$  be the group of all  $2 \times 2$  non-singular matrices over the reals. Find the center of  $G$ . 3

ধর  $G$  একটি  $2 \times 2$  non-singular বাস্তব ম্যাট্রিক্স-এর দল।  $G$  -এর center টি নির্ণয় কর।

4. Find the rank and nullity of the linear transformation  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that 3

$$L(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$$

Linear transformation  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ -এর rank ও nullity নির্ণয় কর, যেখানে

$$L(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$$

5. Let  $G$  be a group. Suppose  $a, b \in G$  such that  $ab = ba$ ,  $(o(a), o(b)) = 1$ . Show that  $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$ . 3

ধর  $G$  একটি দল। মনে কর  $ab = ba$  ও  $(o(a), o(b)) = 1$ , যেখানে  $a, b \in G$ । দেখাও যে  $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$ ।

6. Check whether the set of vectors  $S = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$  is linearly independent in  $\mathbb{R}^3$ . 3

$S = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$  ভেক্টর সেটটি  $\mathbb{R}^3$  তে রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল (linearly independent) হবে কিনা পরীক্ষা কর।

### GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer any four questions from the following

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

7. Using group theory prove that  $(1320)^6 \equiv 1 \pmod{7}$ . 6

দলতত্ত্ব (Group theory)-এর সাহায্যে প্রমাণ কর  $(1320)^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ।

8. Find the linear transformation from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$  which has its range subspace spanned by  $(1, 0, -1)$  and  $(1, 2, 2)$ . 6

$\mathbb{R}^3$  থেকে  $\mathbb{R}^3$  তে একটি linear transformation নির্ণয় কর যার range subspace টি  $(1, 0, -1)$  এবং  $(1, 2, 2)$  দ্বারা গঠিত।

9. (i) Show that an odd permutation is of even order. 3+3  
 দেখাও যে অযুগ্ম বিন্যাসের ক্রমটি যুগ্ম হয়।  
 (ii) Write all the subgroups of  $S_3$ .  
 $S_3$  দলটির সমস্ত উপদল (Subgroups) গুলি উল্লেখ কর।

10. (i) If  $N$  is a normal subgroup of order 2 of a group  $G$ , then show that  $N \subseteq Z(G)$ . 3+3  
 যদি  $N$  কোনো একটি দল  $G$  এর 2 ক্রমবিশিষ্ট normal উপদল (subgroup) হয় তাহলে দেখাও যে  $N \subseteq Z(G)$ ।

- (ii) Let  $T$  be a linear operator on  $\mathbb{R}^3$  defined by

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$$

Show that  $T$  is invertible and find  $T^{-1}$ .

ধর  $\mathbb{R}^3$  তে  $T$  একটি linear operator যেখানে  $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$  দেখাও যে  $T$  invertible-এ ছাড়াও  $T^{-1}$  টি নির্ণয় কর।

11. Let  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  be the group under binary operation  $*$  defined by 3+3  
 $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$

Let  $H = \{(a, 5a) : a \in \mathbb{R}\}$ . Show that  $H$  is a subgroup of  $G$ . Describe the left cosets of  $H$  in  $G$ .

ধর binary operation  $*$  এর সাপেক্ষে  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  একটি দল, যেখানে  $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ । এছাড়াও ধর  $H = \{(a, 5a) : a \in \mathbb{R}\}$ . দেখাও যে  $H, G$  দলের একটি উপদল (subgroup)। এছাড়াও  $G$  তে  $H$  এর left coset গুলি বর্ণনা কর।

12. Find  $\dim U, \dim V, \dim U \cap V$  and  $\dim(U + V)$ , where 6  
 $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$   
 $V = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$

$\dim U, \dim V, \dim U \cap V$  এবং  $\dim(U + V)$  নির্ণয় কর, যেখানে

$$U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$$

### GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

- 13.(a) Prove that a group  $G$  is abelian iff  $(ab)^2 = a^2b^2 \quad \forall a, b \in G$ . 6  
 প্রমাণ কর  $G$  দলটি abelian হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি  $(ab)^2 = a^2b^2$  যেখানে  $\forall a, b \in G$ ।

- (b) Let  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be defined by  $T(x, y, z) = (2x + y - z, y + 4z, x - y + 3z)$ . Find the matrix of  $T$  relative to the ordered basis  $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ .  
 ধর  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  একটি চিত্রণ, যেখানে  $T(x, y, z) = (2x + y - z, y + 4z, x - y + 3z)$ । তাহলে  $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$  ordered basis এর সাপেক্ষে  $T$  এর ম্যাট্রিক্স (matrix of  $T$ ) টি নির্ণয় কর।

- 14.(a) Show that the set  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$  forms a group under matrix multiplications.

দেখাও যে  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$  সেটটি মেট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একটি দল (group) গঠন কর।

- (b) Show that every set of three vectors in  $\mathbb{R}^2$  is linearly dependent. Also show that  $(1, 0, 0), (1, 1, 1)$  and  $(1, 2, 3)$  are linearly independent in  $\mathbb{R}^3$ .

দেখাও যে তিনটি ভেক্টরের সেট,  $\mathbb{R}^2$  এর মধ্যে linearly dependent (রৈখিকভাবে নির্ভরশীল) হয়। এছাড়াও, প্রমাণ কর  $(1, 0, 0), (1, 1, 1)$  এবং  $(1, 2, 3)$ ,  $\mathbb{R}^3$  এর মধ্যে linearly independent (রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল)।

- 15.(a) Find the basis and dimension for the subspace  $S$  of  $\mathbb{R}^3$  defined by

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z, 2x + 3z = y\}$$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z, 2x + 3z = y\}$   $\mathbb{R}^3$ -এর (subspace) উপদেশটির বুনয়াদ (basis) এবং মাত্রা (dimension) টি নির্ণয় কর।

- (b) Find  $fg, f^{-1}, g^{-1}$ , where

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

যদি  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  হয় তবে  $fg, f^{-1}, g^{-1}$  নির্ণয় কর।

- (c) Prove that an infinite cyclic group has precisely two generators.

প্রমাণ কর একটি অসীম চক্রজ দল (Infinite cyclic group)-এর কেবলমাত্র দুটি generator থাকে।

- 16.(a) Let  $(\mathbb{Z}, +)$  be the group of integers. Let  $N = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Then show that  $N$  is a normal subgroup of  $\mathbb{Z}$ .

ধর  $(\mathbb{Z}, +)$  একটি পূর্ণসংখ্যার দল এবং  $N = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . প্রমাণ কর  $N, \mathbb{Z}$  এর একটি normal subgroup হবে।

- (b) In  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = (3, 1), \beta = (2, -1)$ . Determine  $L\{\alpha, \beta\}$  and show that  $L\{\alpha, \beta\} = \mathbb{R}^2$ .

$\mathbb{R}^2$ -এর মধ্যে ধর  $\alpha = (3, 1), \beta = (2, -1)$ । তাহলে  $L\{\alpha, \beta\}$  নির্ণয় কর এবং দেখাও যে  $L\{\alpha, \beta\} = \mathbb{R}^2$ ।

- (c) Find all elements of order 6 in  $(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$ .

$(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$  দলে সকল 6 ক্রমের (order 6) উপাদানগুলি নির্ণয় কর।

—x—