



'সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2022

DSE1/2/3-P2-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

**The question paper contains paper DSE-2A and DSE-2B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

DSE-2A

LINEAR PROGRAMMING

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer any *four* questions from the following

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Prove that, the set defined by $X = \{x: |x| \leq 2\}$ is a convex set. 3

প্রমাণ কর, সেট $X = \{x: |x| \leq 2\}$ একটি উত্তল সেট।

$X = \{x: |x| \leq 2\}$ লে পরিभाषित set एउटा convex set हो भनी प्रमाण गर।

2. Use dominance to reduce the pay-off matrix and solve the game with the following pay-off matrix: 3

ডমিনেন্স (Dominance) পদ্ধতি ব্যবহার করে নিম্নলিখিত পে-অফ/পরিশোধ ম্যাট্রিক্সকে রিডিউস (reduce) কর এবং নিম্নলিখিত পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (Pay off matrix) বিশিষ্ট খেলা (Game)-কে সমাধান করঃ

दिइएको pay-off matrix लाई dominance प्रयोग गरी घटाएर त्यसको खेल (game) समाधान गर।

	B_1	B_2	B_3
A_1	6	8	6
A_2	4	12	2

3. Find the dual of the following L.P.P.: 3

दिइएको L.P.P. बाट dual निर्णय गर।

Minimize $Z = -6x_1 - 8x_2 + 10x_3$

Subject to, $x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$

$2x_1 - x_3 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-এর Dual বের কর -

$$\text{সর্বনিম্ন (Minimize)} \quad Z = -6x_1 - 8x_2 + 10x_3$$

$$\text{-এর সাপেক্ষে (Subject to),} \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$2x_1 - x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Solve the following problem graphically: 3

দিহएको समस्यालाई ग्राफिक रूपमा समाधान गर।

$$\text{Minimize} \quad Z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{Subject to,} \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমস্যা সমাধান করঃ

$$\text{সর্বনিম্ন (Minimize)} \quad Z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{-এর সাপেক্ষে (Subject to),} \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Find the extreme points, if any, of the set $X = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$. 3

সেট $X = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ -এর কোন চরম বিন্দুসমূহ (extreme points) থাকলে তা বের কর।

যদি छ भने, set $X = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ को चरम बिन्दु निर्णय गर।

6. Write down the following L.P.P. in standard form: 3

Standard form मा दिहएको L.P.P. लाई लेखः

$$\text{Minimize} \quad Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{Subject to,} \quad -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-কে প্রমাণ আকারে (Standard form) পরিণত করঃ

$$\text{সর্বনিম্ন (Minimize)} \quad Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{-এর সাপেক্ষে, (Subject to),} \quad -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

GROUP-B / विभाग-ख / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following

6×4 = 24

निम्नलिखित ये-कौन चारटि प्रश्नो उतर दाओ

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. Show that $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1$ is a basic solution of the system of equations 6

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

Find the other basic solutions (if any).

देखाओ ये, $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1$ समीकरण सिस्टम $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$ -एर मौलिक समाधान (Basic solution)। अन्य मौलिक समाधान (Basic solution) থাকले ता बेर कर।

$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1$ समीकरणहरूको प्रणाली $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$ को basic समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि छ भने अरु basic समाधानहरू पनि निर्णय गर।

8. Draw graphically the feasible space, if any, given by the following L.P.P. and find out the extreme points of the feasible region. 6

दिइएको L.P.P. बाट यदि सम्भाव्य ठाँउ (Feasible space) छ भने ग्राफिक रूपमा चित्रण गर अनि सम्भाव्य क्षेत्र को चरम बिन्दुहरू पनि खोज गर।

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to, } 5x_1 + 6x_2 \geq 30$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 \leq 12 ; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

लेखचित्रे माध्यमे, निम्नलिखित एल.पि.पि. (L.P.P.)-एर सम्भाव्य जायगा/स्थान (Feasible space) यदि থাকे तबे बेर कर एवं सम्भाव्य अঞ্চल (Feasible region)-एर चरम बिन्दुसमूह (Extreme points) बेर कर।

$$\text{सर्वाधिक (Maximize) } \quad Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{-एर सापेक्ष (Subject to), } \quad 5x_1 + 6x_2 \geq 30$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 \leq 12 ; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

9. Find the minimum cost solution for the 4×4 assignment problem whose cost coefficients are given by: 6

4×4 assignment समस्याको न्यूनतम लागत समाधान खोज गर, जस्को लागत गुणांक यस प्रकार छ।

	I	II	III	IV
A	2	-1	-1	-2
B	1	0	-2	-1
C	1	-1	-2	0
D	2	2	1	1

নিম্নলিখিত 4×4 অর্পিত সমস্যার (Assignment problem) সর্বনিম্ন মূল্য সমাধান (Minimum cost solution) বের কর, যার মূল্য সহগসমূহ (Cost coefficients) দেওয়া হয়েছে।

	I	II	III	IV
A	2	-1	-1	-2
B	1	0	-2	-1
C	1	-1	-2	0
D	2	2	1	1

10. Solve the following L.P.P. by Simplex method:

6

দিহ্রকো L.P.P. লাই Simplex পদ্ধতি দ্বারা সমাধান গর।

$$\text{Minimize } Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

$$\text{Subject to, } 3x_2 - x_3 + 2x_5 \leq 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 \leq 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 \leq 10$$

$$x_2, x_3, x_5 \geq 0$$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-টি সরলীকৃত পদ্ধতিতে (Simplex method) সমাধান করঃ

$$\text{সর্বনিম্ন (Minimize) } Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

$$\text{-এর সাপেক্ষে (Subject to), } 3x_2 - x_3 + 2x_5 \leq 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 \leq 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 \leq 10$$

$$x_2, x_3, x_5 \geq 0$$

11. Solve the following transportation problem:

6

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটি (Transportation problem) সমাধান করঃ

দিহ্রকো transportation সমস্যা সমাধান গর।

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	2	1
O_2	2	1	5
O_3	2	4	3

12. Use Big-M method to solve the following L.P.P.:

6

Big-M পদ্ধতি দ্বারা দিহ্রকো L.P.P. সমাধান গর।

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{Subject to, } 2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4 \quad ; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

বিগ-এম পদ্ধতি (Big-M method) ব্যবহার করে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P.) সমাধান করঃ

$$\begin{aligned} \text{সর্বাধিক (Maximize)} \quad & Z = 3x_1 - x_2 \\ \text{-এর সাপেক্ষে (Subject to),} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \quad ; \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

তলকা কুনৈ দুই প্রশ্নহরুকা উত্তর দেজ

13.(a) Solve graphically the following game:

4

নিম্নলিখিত খেলাটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করঃ

দিइएको खेललाई ग्राফिक रूपमा समाधान गर।

$$\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_3 \\ A_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \\ A_2 \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) Using following cost matrix, determine optimal job assignment and the cost of assignments:

8

तल दिइएको लागत matrix प्रयोग गरी, optimal job assignment अनि cost of assignment हरुको लागत निर्णय गर।

		Job				
		P	Q	R	S	T
Mechanic	A	10	3	3	2	8
	B	9	7	8	2	7
	C	7	5	6	2	4
	D	3	5	8	2	4
	E	9	10	9	6	10

निम্নलिखित मूल्य म्याट्रिक्स (Cost matrix) ব্যবহার করে, অনুকূল কার্য অর্পিত (Optimal job assignment) এবং অর্পিত সমস্যার মূল্য নির্ধারণ করঃ

		কার্য				
		P	Q	R	S	T
শ্রমিক	A	10	3	3	2	8
	B	9	7	8	2	7
	C	7	5	6	2	4
	D	3	5	8	2	4
	E	9	10	9	6	10

14. Solve the following L.P.P. with the help of Two Phase method:

12

Two Phase पद्धति द्वारा तल दिइएको L.P.P. समाधान गर।

$$\text{Minimize } Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{Subject to, } -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

दुई फेज (Two Phase) पद्धतिर साहाय्ये निम्नलिखित एल.पि.पि. (L.P.P.)-टि समाधान करः

$$\text{सर्वनिम्न (Minimize) } Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{-एर सापेक्षे (Subject to), } -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

15. An agriculture farm has 180 tons of Nitrogen fertilizers, 250 tons of phosphate and 220 tons of potash. It is able to sell 3:3:4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 1:2:1 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Pose a L.P.P. to show how many tons of these two mixtures should be prepared to obtain the maximum profit. Solve the problem by graphical method.

8+4

एकटि कृषि फार्मे 180 टन नाइट्रोजेन सार, 250 टन फसफेट एवं 220 टन पटाश आहे। एहि पदार्थगुलिर 3:3:4 मिश्रणके 15 टाका लाभे एवं 1:2:1 मिश्रणके 12 टाका लाभे विक्रय करा याय। एहि दुइ मिश्रणेर कत टन तैरी करा उचित याते लाभ सर्वोच्च हय, एहि मर्मे एकटि एल.पि.पि. (L.P.P.) तैरी कर। एहि समस्याटि लेखचित्रेर माध्यमे समाधान कर।

एउटा कृषि फार्ममा 180 टन् Nitrogen मल, 250 टन् phosphate अनि 220 टन् potash छ। यसले क्रमसंगले 3:3:4 को पदार्थ मिश्रण लाई ₹15 प्रति टन् को नाफामा अनि 1:2:1 को पदार्थ मिश्रणलाई ₹12 प्रति टन्को नाफामा बेच्न सक्छ। कति टन्को यस पदार्थको मिश्रण ज्यादा मापमा नाफा पाउनु को लागी बनाउन सक्छ भन्ने एउटा L.P.P. तयार गर। यस समस्यालाई ग्राफिक रूपमा समाधान गर।

16. Find the dual problem of the following L.P.P. and then solve the dual problem:

12

तल दिइएको L.P.P. को dual समस्या खोज अनि त्यस dual समस्यालाई समाधान गर।

$$\text{Maximize } Z = x_1 + 6x_2$$

$$\text{Subject to, } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

निम्नलिखित एल.पि.पि. (L.P.P.) -एर द्वैत (Dual) समस्या बेर कर एवं द्वैत समस्याटि समाधान करः

$$\text{सर्वाधिक (Maximize) } Z = x_1 + 6x_2$$

$$\text{-एर सापेक्षे (Subject to), } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

DSE-2B

METRIC SPACES AND COMPLEX ANALYSIS

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer any four questions from the following

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Show that $f(z) = \text{Im}(z)$ is nowhere differentiable in \mathbb{C} .

দেখাও $f(z) = \text{Im}(z)$ অপেক্ষকটি জটিল তলে অবকলনযোগ্য নয়।

$f(z) = \text{Im}(z)$ মা কতৈ পনি differentiable छैन भनी प्रमाण गर।

2. Let $X \neq \emptyset$ and $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

for $x, y \in X$. Prove that (X, d) is a metric space.

ধরা যাক, $X \neq \emptyset$ এবং $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ -একটি অপেক্ষক, যেটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িতঃ

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = y \\ 1 & \text{যখন } x \neq y \end{cases}$$

যেখানে $x, y \in X$ । প্রমাণ কর (X, d) -একটি metric space।

यदि $X \neq \emptyset$ अनि $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ $x, y \in X$ ले परिभाषित भए (X, d) एउटा metric space हो

भनी प्रमाण गर।

3. Show that $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)$ does not exist.

দেখাও $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)$ -এর কোনো অস্তিত্ব নেই।

$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)$ exist गर्देन भनी प्रमाण गर।

4. Show that the function $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$ is Harmonic.

দেখাও যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি Harmonic-অপেক্ষকঃ

$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, যেখানে $u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$

$u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$ ले परिभाषित फलन $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Harmonic हो भनी प्रमाण गर।

5. Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \rightarrow Y$ be a continuous map, and $\{x_n\}$ be a convergent sequence in X . Is the sequence $\{f(x_n)\}$ convergent? — Justify.

ধরা যাক, (X, d) এবং (Y, ρ) -দুটো Metric space এবং $f : X \rightarrow Y$ একটি সন্তত অপেক্ষক, এবং $\{x_n\}$ একটি অভিমুখী অনুক্রম। এখন $\{f(x_n)\}$ অনুক্রমটি কী অভিমুখী হবে? বিশ্লেষণ কর।

যদি (X, d) , (Y, ρ) দুইটো metric space হরু মএ, অনি $f : X \rightarrow Y$ এতটা continuous map মএ যনি $\{x_n\}$ X মা এতটা অমিকেন্দ্রিত (convergent) অনুক্রম মএ। অনুক্রম $\{f(x_n)\}$ পনি অমিকেন্দ্রিত হৌ? উত্তরলাই ন্যাযোচিত (justify) গর।

6. Show that every differentiable function $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is continuous.

দেখাও প্রতিটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ সন্তত।

প্রত্যেক differentiable ফলন $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continuous হৌ মনী প্রমাণ গর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer any four questions from the following

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. State and prove Cauchy-Riemann equations. 2+4

Cauchy-Riemann সমীকরণগুলো বর্ণনা কর এবং সেগুলো প্রমাণ কর।

Cauchy-Riemann সমিকরণলাই উল্লেখ অনি প্রমাণ গর।

8. Let $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, and $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, and $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Then show that f is continuous at z_0 iff u and v are continuous at (x_0, y_0) . 3+3

ধরা যাক, $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, এবং $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, এবং $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ । প্রমাণ কর f অপেক্ষকটি z_0 বিন্দুতে সন্তত হলে, u এবং v অপেক্ষকদ্বয়ও (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত হবে, এবং প্রমাণ কর, যদি u এবং v অপেক্ষকদ্বয় (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত হয়, তাহলে f অপেক্ষকটিও z_0 বিন্দুতে সন্তত হবে।

যদি $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ অনি $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ অনি $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ । z_0 মা f এতটা নিরন্তর (continuous) হুন্ড যদি র মাত্র যদি u অনি v নিরন্তর হুন্ড (x_0, y_0) মা।

9. Let $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ be defined by $u(x, y) = x^2 + 2xy + 3$. 6

Can you construct an analytic function $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\text{Re}(f) = u$, (where you can choose D suitably).

If the construction is not possible, then explain the reason.

ধরা যাক, $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিতঃ

$$u(x, y) = x^2 + 2xy + 3.$$

এমন কোনো Analytic অপেক্ষক $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ -এর অস্তিত্ব দেখানো সম্ভব কী, যার জন্য $\text{Re}(f) = u$ হবে? (অঙ্কটি করার সময়, D উপযুক্তভাবে নিতে পারবে)। যদি এ ধরনের অপেক্ষকের অস্তিত্ব না থাকে, তাহলে যৌক্তিকতা বিচার করো।

যদি $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ লাই $u(x, y) = x^2 + 2xy + 3$ লে পরিমার্জিত গরিপ কে তিমীলে এডটা analytic ফলন $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ নির্মাণ গর্ন সক্ষম, জহাঁ $\text{Re}(f) = u$ হুন্ড? (D লাই আপনো হিসাবলে চান্নুহোস)। যদি নির্মাণ নমএকো খ্রণ্ডমা ত্যসকো কারণ বতাত।

10. Let (\mathbb{R}^2, d) be a metric space, where d is the Euclidean metric on \mathbb{R}^2 . Let $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ be a sequence and $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Prove that $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ if and only if $x_n \rightarrow x_0$ and $y_n \rightarrow y_0$ in \mathbb{R} . 3+3

ধরা যাক, (\mathbb{R}^2, d) হলো একটি Euclidean metric Space এবং $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ একটি অনুক্রম, এবং $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ । প্রমাণ কর $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ হলে $x_n \rightarrow x_0$ এবং $y_n \rightarrow y_0$ । আরো, প্রমাণ কর, যদি $x_n \rightarrow x_0$ এবং $y_n \rightarrow y_0$ হয়, তাহলে $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ ।

যদি (\mathbb{R}^2, d) এডটা metric space মএ জহাঁ d \mathbb{R}^2 মা মএকো Euclidean metric হো। যদি $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ এডটা অনুক্রম মএ অনি $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ মএ, প্রমাণ গর $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ যদি অনি যদি মাত্র $x_n \rightarrow x_0$ অনি $y_n \rightarrow y_0$, \mathbb{R} মা।

11. State and prove Cantor's theorem for a complete metric space. 2+4
একটি Complete Metric Space-এর জন্য Cantor'-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।
Complete Metric Space কো লাগী Cantor's কো উপপাদ্য উল্লেখ অনি প্রমাণ গর।

12. Let (X, d) be a metric space and $A, B \subseteq X$. Show that 6

$$d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \text{dist}(A, B),$$

where $d(A)$ denotes the diameter of A and $\text{dist}(A, B)$ denotes the distance between A and B .

ধরা যাক, (X, d) একটি Metric Space এবং $A, B \subseteq X$ ।

দেখাও $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \text{dist}(A, B)$, যেখানে $d(A)$ -এর অর্থ, A সেটের ব্যাস এবং $\text{dist}(A, B)$ -এর অর্থ, A এবং B সেটদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব।

যদি (X, d) এডটা metric space মএ অনি $A, B \subseteq X$ প্রমাণ গর $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \text{dist}(A, B)$, জহাঁ $d(A)$ লে A কো ব্যাস বোধ গর্ড অনি $\text{dist}(A, B)$ লে A অনি B মাল্লকো দুরী বতাতুঁচ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

তলকা কুনৈ দুই প্রশ্নহরকো উত্তর দেউ

- 13.(a) Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$ be a compact set. Prove that A is closed and bounded. Is the converse part true? — Justify. 3+3+2

ধরা যাক, (X, d) একটি Metric Space এবং $A \subseteq X$ একটি Compact Set। প্রমাণ কর A সেটটি closed এবং bounded।

এই বাক্যটির বিপরীত বাক্যটি (Converse Part) কী সত্য?

मानौ (X, d) एउटा metric space अनि $A \subseteq X$ एउटा compact set हो। A closed अनि bounded हो भनी प्रमाण गर। यसको उल्टो सत्य हो ? न्यायोचित गर।

- (b) Show that every convergent sequence in a metric space (X, d) is Cauchy sequence. What is the converse part of the result? 3+1

कौन Metric Space ए, ये-कौन अभिमुखी अनुक्रम सर्वदाई Cauchy अनुक्रम हबे। एई बाक्यटि विपरीत बाक्यटि (Converse part) की सत्य हबे ?

Metric space (X, d) मा प्रत्येक अभिकेन्द्रित अनुक्रम Cauchy अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर। यस परिणामको उल्टो के हुन्छ ?

- 14.(a) Evaluate: / निर्णय करः / मान निर्णय गर: 4

$$\int_{|z+4|=2} \frac{z dz}{(16-z^2)(z+i)}$$

- (b) Justify: / योजिकता विचार करः / न्यायोचित गर: $\operatorname{Re} \left[\int_{\gamma} f(z) dz \right] = \left[\int_{\gamma} \operatorname{Re}(f(z)) dz \right]$ 3

- (c) Prove that the argument function “arg”, where $\operatorname{arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ is not continuous. 3

प्रमाण करः Argument अपेक्षकटि “ $\operatorname{arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ ” सञ्जत ना।

Argument फलन “arg” जहाँ $\operatorname{arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ निरन्तर छैन भनी प्रमाण गर।

- (d) Find the image of the point $z = \sqrt{3} - i$ on the Riemann sphere under the stereographic projection. 2

Riemann Sphere-ए Stereographic अभिक्षेप द्वारा $z = \sqrt{3} - i$ बिन्दुटि प्रतिबिम्बटि की हबे ?

Riemann sphere को stereographic projection मा बिन्दु $z = \sqrt{3} - i$ को image निर्णय गर।

15. Let $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, where D is open and connected, and f be analytic on D .

धरा याक $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ एकटि अपेक्षक, येखाने D सेटटि Open एवं Connected, एवं f अपेक्षकटि D सेटे Analytic।

मानौ $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, जहाँ D open अनि connected हो अनि f D मा analytic हो।

- (a) If $\overline{f(z)}$ is analytic, then $f(z)$ is constant. — Justify. 4

यदि $\overline{f(z)}$ अपेक्षकटि analytic हय, ताहले f अपेक्षकटिओ analytic हबे। योजिकता विचार कर।

यदि $\overline{f(z)}$ analytic हो भने $f(z)$ स्थिरांक constant हो। न्यायोचित गर।

- (b) Evaluate: / मान निर्णय करः / मान निर्णय गर: 2

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$$

- (c) Show that $\operatorname{Re}(f)$ is harmonic on D . 3

प्रमाण करः $\operatorname{Re}(f)$ एकटि Harmonic अपेक्षक।

$\operatorname{Re}(f)$ D मा harmonic छ भनी प्रमाण गर।

(d) Let $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Show that $f : D \rightarrow L$ is a constant function. 3

ধরা যাক, $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. দেখাও $f : D \rightarrow L$ অপেক্ষকটি ধ্রুবক অপেক্ষক।

মান্নৌ $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. $f : D \rightarrow L$ এডটা স্থিথরাংক ফলন হৌ ভনী প্রমাণ গর।

16.(a) Show that the set of natural numbers is not complete with respect to the metric 4

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|,$$

where m, n are natural numbers.

প্রমাণ কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ $m, n \in \mathbb{N}$ metric-এর সাপেক্ষে incomplete।

Metric $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ কো সন্দর্ভমা, প্রাকৃতিক সংখ্যাকো set complete চ্টন ভনী প্রমাণ গর, জহাঁ m অনি n প্রাকৃতিক সংখ্যাহরু হুন্।

(b) Show that (\mathbb{R}, d) is a metric space, where d is defined by 4

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x| + |y|, & \text{otherwise} \end{cases}$$

প্রমাণ কর (\mathbb{R}, d) একটি Metric Space, যেখানে d -মেট্রিকটি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিতঃ

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{যখন } xy \leq 0 \\ |x| + |y|, & \text{যখন } xy > 0 \end{cases}$$

(\mathbb{R}, d) এডটা metric space হৌ ভনী প্রমাণ গর জহাঁ d লাই

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x| + |y|, & \text{otherwise} \end{cases} \text{ লে পরিभाषित गरिएको छ।}$$

(c) In a metric space, show that arbitrary union of open sets is open. 2

প্রমাণ কর যে-কোন Metric Space-এ যদৃচ্ছ (arbitrary) open-সেটের union open-সেট হবে।

কুনৈ metric space মা, open set হরুকৌ (arbitrary) সংঘ open চ্ট ভনী প্রমাণ গর।

(d) In a metric space, countable intersection of open sets may not be open. — Explain. 2

যে-কোন Metric Space-এ countable সংখ্যক open সেটের intersection করলে open সেট নাও হতে পারে। বিশ্লেষণ কর।

কুনৈ metric space মা, open set হরুকৌ গণনাযোগ্য (countable) প্রতিচ্ছদন্ open নহুন্ পনি সক্ষ চ্ট। ব্যাখ্যা গর।

—x—