UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 2nd Semester Examination, 2021

DSC2-MATHEMATICS

ALGEBRA

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The questions are of equal value.
The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

বিভাগ-ক

1. Answer ***all*** the questions from the following: 2×5=10
নিম্নলিখিত ***সবগুলি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Verify Cayley Hamilton theorem for the square matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সটির সাপেক্ষে Cayley Hamilton উপপাদ্যটি যাচাই কর।

(b) A relation ρ is defined on $\mathbb{Z}$ by $x\rho y$ iff $x^2 - y^2$ divisible by 5. Prove that ρ is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$.
অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট $\mathbb{Z}$-এর ওপর একটি সম্বন্ধ ρ -এর সংজ্ঞা এইরূপঃ

$$x\,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 - y^2,\ 5 \text{ দ্বারা বিভাজ্য।}$$

দেখাও যে ρ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ (equivalence relation)।

(c) Use Descartes' rule of signs to find the number of positive roots of the equation $x^6 + x^4 + x^2 + x + 3 = 0$.
'Descartes' rule of sign' (Descarte-এর চিহ্ন সংক্রান্ত সূত্রগুলো দ্বারা $x^6 + x^4 + x^2 + x + 3 = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক বীজগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

(d) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, find the rank of $2A - A^2$.

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $2A - A^2$ -এর rank নির্ণয় কর।

(e) Show that the map $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^{2020}$ is neither injective nor surjective, $\mathbb{R}$ being the set of reals.
$\mathbb{R}$ যদি বাস্তব সংখ্যার সেট হয় এবং $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি $f(x) = x^{2020}$ দ্বারা সংজ্ঞাত, তাহলে প্রমাণ কর f অপেক্ষকটি ঐকৈক (injective) কিংবা উপরি (surjective) কোনোটাই নয়।

GROUP-B

বিভাগ-খ

Answer *all* the questions from the following 12×3=36

নিম্নলিখিত *সবগুলি* প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) Prove that $\tan\left\{i\log\dfrac{a-ib}{a+ib}\right\}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$. 4

প্রমাণ কর $\tan\left\{i\log\dfrac{a-ib}{a+ib}\right\}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ ।

(b) Reduce the equation $x^3-3x^2+12x+16=0$ to its standard form and then solve the equation by Cardan's method. 4

$x^3-3x^2+12x+16=0$ সমীকরণটিকে ইহার Standard form-এ রূপান্তরিত কর এবং Cardan পদ্ধতিতে উক্ত সমীকরণটিকে সমাধান কর।

(c) Prove that the roots of the equation $\dfrac{1}{x+a_1}+\dfrac{1}{x+a_2}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{x+a_n}=\dfrac{1}{x}$ are all real, where $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ are all positive real numbers. 4

প্রমাণ কর যে $\dfrac{1}{x+a_1}+\dfrac{1}{x+a_2}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{x+a_n}=\dfrac{1}{x}$ সমীকরণটির সকল বীজগুলি বাস্তব, যেখানে $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ সকলে ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

3. (a) Show that $19^{20}\equiv 1 \pmod{181}$. 3

প্রমাণ কর যে $19^{20}\equiv 1 \pmod{181}$ ।

(b) Using Euclidean Algorithm, find two integers u and v satisfying $1269u+297v=135$. 4

$1269u+297v=135$ সমীকরণকে সীদ্ধ করে এমন দুটি পূর্ণসংখ্যা u এবং v কে Euclidean algorithm-এর সাহায্যে নির্ণয় কর।

(c) Use Principle of Mathematical Induction to prove that for all $n\in\mathbb{N}$, 5

$$1.1!+2.2!+\cdots\cdots\cdots+n.n!=(n+1)!-1$$

গাণিতিক আবেশ নীতির (Principle of Mathematical Induction) দ্বারা দেখাও যে সকল $n\in\mathbb{N}$-এর জন্য $1.1!+2.2!+\cdots\cdots\cdots+n.n!=(n+1)!-1$.

4. (a) Use Cayley-Hamilton theorem to find A^{100}, where $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. 4

যদি $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ হয় তাহলে Cayley-Hamilton উপপাদ্যের সাহায্যে A^{100} এর মান নির্ণয় কর।

(b) Find the eigenvalue and the corresponding eigenvector of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেনমান (Eigenvalue) এবং ইহার আইগেন ভেক্টর (eigenvector) গুলি নির্ণয় কর।

(c) Let λ_1 and λ_2 be two distinct eigen values of a real square matrix A. If u and v are eigen vectors of A corresponding to the eigen values λ_1 and λ_2 respectively, examine whether $u+v$ an eigen vector of A. 3

ধর λ_1 এবং λ_2 কোন একটি বাস্তব বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর দুটি পৃথক আইগেন মান। যদি u এবং v যথাক্রমে λ_1 এবং λ_2 আইগেন মানের আইগেন ভেক্টর হয় তবে $u+v$, A ম্যাট্রিক্সটির একটি আইগেন ভেক্টর হবে কিনা যাচাই কর।

GROUP-C
বিভাগ-গ

Answer *all* the questions from the following 7×2=14

নিম্নলিখিত *সবগুলি* প্রশ্নের উত্তর দাও

5. (a) If a, b, c are three positive rational numbers then prove that 5

যদি a, b, c তিনটি ধনাত্মক মূলদ (Rational) সংখ্যা হয় তাহলে প্রমাণ করঃ

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geq a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$$

(b) If A, B are square matrices of same order over the field F, A is non-singular prove that the matrices B and ABA^{-1} have the same eigen values. 2

যদি A এবং B দুটি সমান ক্রম (order)-এর বর্গম্যাট্রিক্স যেখানে A হল non-singular, তাহলে প্রমাণ কর B এবং ABA^{-1} ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের আইগেন মানগুলি একই হবে।

6. Determine the conditions for which the system of equations 2+2+3=7

$$x+y+z=1$$
$$x+2y-z=b$$
$$5x+7y+az=b^2$$

admits of (i) only one solution (ii) no solution (iii) many solutions.

একটি মাত্র সমাধান (i) কোন্ সমাধান নেই (ii) একাধিক সমাধানের জন্য

$$x+y+z=1$$
$$x+2y-z=b$$
$$5x+7y+az=b^2$$

সমীকরণ তন্ত্রের (system of equations) শর্তগুলি উল্লেখ কর।

——×——