UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2021

SEC2 (P2)-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains SEC2A and SEC2B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* papers.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.

SEC2A

THEORY OF EQUATION

GROUP-A / বিভাগ-ক

1. Answer ***all*** questions: 2×5 = 10

সবকটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) If (ax^3+bx^2+cx+d) be divisible by (x^2+c^2), then show that $ad=bc$.

যদি (ax^3+bx^2+cx+d), (x^2+c^2) দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে দেখাও যে $ad=bc$.

(b) If $p,\ q,\ r$ be positive, then show that $x^4+px^3+qx-r=0$ has one positive, one negative and two imaginary roots.

যদি $p,\ q,\ r$ ধনাত্মক সংখ্যা হয় তাহলে দেখাও যে $x^4+px^3+qx-r=0$ সমীকরণের একটি ধনাত্মক, একটি ঋণাত্মক এবং দুটি কাল্পনিক বীজ আছে।

(c) If the roots of the equation $x^3-ax^2+bx-c=0$ be in harmonic progression, then show that the mean root is $\frac{3c}{b}$.

যদি $x^3-ax^2+bx-c=0$ সমীকরণের বীজগুলি বিপরীত প্রগতি (harmonic progression)-তে থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে বীজগুলির গড় (mean) $\frac{3c}{b}$.

(d) Find the remainder when $x^5-3x^4+4x^2+x+4$ is divided by $(x+1)(x-2)$.

$x^5-3x^4+4x^2+x+4$ কে $(x+1)(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

(e) If the sum of two roots of the equation $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ is zero, prove that $a_1a_2=a_3$.

যদি $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ সমীকরণের দুটি বীজের যোগফল শূন্য হয় তাহলে প্রমাণ কর $a_1a_2=a_3$ ।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer *all* the questions 12×3 =36

সবকটি প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) If α be a root of in equation $x^3-3x+1=0$, show that other two roots are α^2-2 and $2-\alpha-\alpha^2$. 4+4+4

$x^3-3x+1=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হলে দেখাও যে অপর দুটি বীজ α^2-2 এবং $2-\alpha-\alpha^2$.

(b) Transform the following equation into one which shall want the 2nd and 3rd terms:

$$x^4-8x^3+24x^2+px+q=0$$

$x^4-8x^3+24x^2+px+q=0$ সমীকরণটিকে এমন একটি সমীকরণে রূপান্তর কর যার ২য় এবং ৩য় পদদ্বয় অনুপস্থিত থাকবে।

(c) Find in range of k that the equation $x^3-3x+k=0$ may have all real roots.

k-মানের বিস্তারটি নির্ণয় কর যেখানে k-এর সকল মানের জন্য $x^3-3x+k=0$ সমীকরণটির সকল বীজ বাস্তব হবে।

3. (a) If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are the roots of the equation 6+6

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

Prove that $(\alpha_1^2+1)(\alpha_2^2+1)\cdots(\alpha_n^2+1)=(1-p_2+p_4-\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots)^2$.

যদি $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ হয় তাহলে প্রমাণ কর

$$(\alpha_1^2+1)(\alpha_2^2+1)\cdots(\alpha_n^2+1)=(1-p_2+p_4-\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots)^2$$

(b) Solve, by Ferrari's method, the biquadratic equation

$$x^4+5x^3+x^2-13x+6=0$$

Ferrari পদ্ধতিতে $x^4+5x^3+x^2-13x+6=0$ চতুর্ঘাত সমীকরণটিকে সমাধান কর।

4. (a) If α be an imaginary root of $x^{11}-1=0$, prove that 6+6

যদি $x^{11}-1=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হলে দেখাও যে

$$(\alpha+2)(\alpha^2+2)\cdots\cdots(\alpha^{10}+2)=\frac{2^{11}+1}{3}$$

(b) Solve the equation $40x^4-22x^3-21x^2+2x+1=0$ given that the roots are in harmonic progression.

$40x^4-22x^3-21x^2+2x+1=0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর যেখানে দেওয়া আছে সমীকরণটির বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে (harmonic progression) আছে।

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer *all* the questions 7×2 = 14

সবকটি প্রশ্নের উত্তর দাও

5. Show that the equation $x^4-14x^2+24x+k=0$ has 4+3

দেখাও যে $x^4-14x^2+24x+k=0$ সমীকরণের

(i) four real and unequal roots, if $-11<k<-8$.

চারটি বাস্তব এবং অসম বীজ থাকবে, যদি $-11<k<-8$.

(ii) no real root, if $k > 117$.
কোন বাস্তব বীজ থাকবে না, যদি $k > 117$.

6. (a) Solve the equation $4x^4 - 85x^3 + 357x^2 - 340x + 64 = 0$ by changing it to a reciprocal one. 4+3

$4x^4 - 85x^3 + 357x^2 - 340x + 64 = 0$ সমীকরণটিকে পূরক (reciprocal) সমীকরণে রূপান্তরিত করে সমাধান কর।

(b) Solve the cubic $x^3 - 6x - 9 = 0$, by Cardan's method.

Cardan পদ্ধতিতে $x^3 - 6x - 9 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটিকে সমাধান কর।

SEC2B

NUMBER THEORY

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer *all* questions 2×5 = 10

***সবকটি* প্রশ্নের উত্তর দাও**

1. Find / মান নির্ণয় করঃ

gcd(12378, 3054)

2. Use the theory of congruence to establish:
Congruence তত্ত্বের দ্বারা সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত করঃ

$$73 \mid 2^{36} - 1$$

3. Solve: / সমাধান করঃ $6x + 51y = 22$.

4. Give an example to show that $ca \equiv cb \pmod{n}$ need not imply $a \equiv b \pmod{n}$.
উদাহরণের সাহায্যে দেখাও যে $ca \equiv cb \pmod{n}$ সর্বদা $a \equiv b \pmod{n}$-কে সূচিত করে না।

5. Find the remainder when 15! is divided by 17.
17 দ্বারা 15!-কে ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer *all* questions 12×3 =36

***সবকটি* প্রশ্নের উত্তর দাও**

6. (a) Let p be a prime. Find a necessary and sufficient condition for which the linear congruence $ax \equiv 1 \pmod{p}$ has a unique solution. 5

ধর p একটি মৌলিক সংখ্যা। তাহলে $ax \equiv 1 \pmod{p}$ রৈখিক congruence-এর কেবলমাত্র একটি সমাধান থাকার প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্ত শর্তগুলি নির্ণয় কর।

(b) Consider the linear congruence $17x \equiv 9 \pmod{276}$. Find its general solution and then integer solutions by solving an equivalent system of congruences, using Chinese Remainder Theorem. 7

ধর $17x \equiv 9 \pmod{276}$ একটি রৈখিক congruence তাহলে ইহার সাধারণ সমাধান (general solution)-টি নির্ণয় কর এবং তারপর Chinese Remainder উপপাদ্যটি ব্যবহার করে একটি সমতুল্য congruence তন্ত্রকে সমাধান করে পূর্ণসংখ্যা সমাধান (integer solution)-টি নির্ণয় কর।

7. (a) Use Fermat's Theorem to prove the following:
Fermat-এর উপপাদ্যটি ব্যবহার করে নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ করঃ

(i) 13 divides $11^{12n+6}+1$ for all $n \in \mathbb{N}$. 3
সকল $n \in \mathbb{N}$-এর জন্য 13, $11^{12n+6}+1$ কে ভাগ করে।

(ii) If $\gcd(a, 35)=1$, show that $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$. 3
যদি $\gcd(a, 35)=1$, দেখাও যে $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$.

(iii) Verify that $5^{38} \equiv 4 \pmod{11}$. 3
$5^{38} \equiv 4 \pmod{11}$ সম্পর্কটি যাচাই কর।

(b) Find the remainder when $1! + 2! + \cdots + 100!$ is divided by 15. 3
15 দ্বারা $1! + 2! + \cdots + 100!$ কে ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

8. (a) Prove that an integer p is a prime iff $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. 8
প্রমাণ কর একটি পূর্ণসংখ্যা p মৌলিক হবে যদি এবং কেবল যদি $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

(b) If p be a prime, prove that for any integer a, 4
যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে যে কোন পূর্ণসংখ্যা a-এর জন্য দেখাও যে,

$$p \mid a^p + (p-1)!\,a \quad \text{and} \quad p \mid (p-1)!\, a^p + a$$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer *all* questions 7×2 = 14

সবকটি প্রশ্নের উত্তর দাও

9. Use Euclidean Algorithm to find gcd(1769, 2378). Further, find integers x and y such that $\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$. 7

Euclidean কলনবিধি (algorithm)-এর সাহায্যে gcd(1769, 2378) মানটি নির্ণয় কর। উপরন্তু, $\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$ সম্পর্কটি সিদ্ধ করে এমন x এবং y পূর্ণসংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

10.(a) Find the invertible elements in $\mathbb{Z}[i]$. 2
$\mathbb{Z}[i]$-এর মধ্যে বিপরীত উপাদান (inverse element)-গুলি নির্ণয় কর।

(b) Define Gaussian prime and give an example. 2
Gaussian prime কি তা একটি উদাহরণের সাহায্যে বল।

(c) Find inverse of 17 modulo 100. 3
17 modulo 100-এর বিপরীত (inverse) টি নির্ণয় কর।

——×——