



UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2021

DSE2-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

**The question paper contains paper DSE-2A and DSE-2B.
The candidates are required to answer any one from two courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

DSE-2A

METRIC SPACES AND COMPLEX ANALYSIS

Answer all the questions

সকল প্রশ্নের উত্তর দাও

GROUP-A / বিভাগ-ক

2×5 = 10

1. (a) Find the diameters of the sets $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ and $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ in the euclidean metric space (\mathbb{R}, d) .

Euclidean metric space (\mathbb{R}, d) তে $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ এবং $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ সেট দ্বয়ের ব্যাসগুলি নির্ণয় কর।

(b) Evaluate: $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 + 1}$

মান নির্ণয় করঃ $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 + 1}$

- (c) Find the image of the point $z = \sqrt{3} - i$ on the Riemann sphere under the stereographic projection.

Riemann sphere-এর উপর stereographic অভিক্ষেপ (projection) দ্বারা $z = \sqrt{3} - i$ বিন্দুটির প্রতিবিম্ব (image)-টি নির্ণয় কর।

- (d) Show that a harmonic function $u(x, y)$ satisfies the differential equation $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

দেখাও যে যে-কোন একটি harmonic অপেক্ষক $u(x, y)$ অবকল সমীকরণ $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ কে সিদ্ধ করে।

(e) Let x, y, z be three elements in a metric space (X, d) . Show that

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

(X, d) metric space এর x, y, z তিনটি উপাদান (element) হলে, প্রমাণ কর

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

12×3=36

2. (a) Consider the euclidean metric space (\mathbb{R}^2, d) . Show that the sets $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ and $B = \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$ are mutually disjoint but $d(A, B) = 0$. 4

ধর (\mathbb{R}^2, d) একটি Euclidean metric space. তাহলে দেখাও যে $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ এবং $B = \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$ সেটদ্বয় পারস্পরিক বিচ্ছিন্ন (mutually disjoint) কিন্তু $d(A, B) = 0$.

(b) If $f = u + iv$ is analytic on a domain D , then show that uv is harmonic on D . 3

D ক্ষেত্রটিতে $f = u + iv$ যদি analytic হয় তাহলে দেখাও যে uv , D ক্ষেত্রটিতে harmonic হবে।

(c) Show that the set of natural number is not complete with respect to the metric 5

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|, \quad m, n \text{ are natural numbers.}$$

প্রমাণ কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$, (যেখানে m, n হল স্বাভাবিক সংখ্যা) metric-এর সাপেক্ষে complete নয়।

3. (a) Evaluate $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ and hence deduce that $\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$. 6

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} \text{ এর মান নির্ণয় কর এবং ইহা থেকে দেখাও } \int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

(b) Show that (\mathbb{R}, d) is a metric space, when d is given by 4

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x| + |y|, & \text{otherwise} \end{cases}$$

প্রমাণ কর (\mathbb{R}, d) একটি metric space যেখানে d নিম্নলিখিতভাবে প্রদত্তঃ

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x| + |y|, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(c) What can you say about the differentiability of the function $f(z) = \frac{z}{3-z}$? 2

$f(z) = \frac{z}{3-z}$ অপেক্ষকটির অন্তরকলন যোগ্যতা (differentiability) সম্পর্কে তুমি কি বলবে ?

4. (a) If $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ 6

then show that it satisfied the C-R equations at $z = 0$ but it is not differentiable at $z = 0$.

যদি $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$

তাহলে দেখাও যে $z = 0$ তে f অপেক্ষকটি C-R সমীকরণকে সিদ্ধ করে, কিন্তু $z = 0$ তে f অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয়।

(b) If (x_n) and (y_n) are Cauchy sequence in a metric space (X, d) , show that (a_n) , where $a_n = d(x_n, y_n)$, converges. Give one such example. 4

(X, d) metric space এ যদি (x_n) এবং (y_n) দুটি Cauchy অনুক্রম (sequence) হয় তাহলে দেখাও যে (a_n) অনুক্রমটি (যেখানে $a_n = d(x_n, y_n)$) অভিমুখী হবে। একটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝিয়ে দাও।

(c) Prove that for any two distinct points a, b in a metric space (X, d) there exist disjoint open spheres with centres a and b respectively. 2

দেখাও যে (X, d) metric space এ যে কোন দুটি পৃথক বিন্দু a এবং b এর জন্য দুটি ভিন্ন a এবং b কেন্দ্রবিন্দু বিশিষ্ট মুক্ত গোলক (open sphere) বিদ্যমান।

GROUP-C / বিভাগ-গ

7×2 = 14

5. (a) Prove that the argument function 'arg', where $\arg: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ is not a continuous function. 3

দেখাও যে $\arg: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi)$, argument অপেক্ষকটি একটি সন্তত অপেক্ষক নয়।

(b) Evaluate: $\int_{|z+4|=2} \frac{z dz}{(16-z^2)(z+i)}$ 4

মান নির্ণয় করঃ $\int_{|z+4|=2} \frac{z dz}{(16-z^2)(z+i)}$

6. Show that \mathbb{R} is complete with respect to d_1 but not with respect to d_2 , where 7

$$d_1(x, y) = 5|x - y|, \quad d_2(x, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

দেখাও যে d_1 এর সাপেক্ষে \mathbb{R} একটি পূর্ণ (complete), কিন্তু d_2 এর সাপেক্ষে complete নয়,

যেখানে $d_1(x, y) = 5|x - y|, \quad d_2(x, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

DSE-2B
LINEAR PROGRAMMING

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer *all* the following questions

2×5 = 10

সকল প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Examine the set of points $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ on the xy -plane is convex or not.

xy -সমতলে অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ উত্তল (Convex) কিনা পরীক্ষা কর।

- (b) Show that although $(2, 3, 2)$ is a feasible solution to the system of equations

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

but it is not a basic solution.

দেখাও যে $(2, 3, 2)$ সমীকরণ সিস্টেম

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-এর সম্ভাব্য সমাধান (feasible solution) হলেও, তা কিন্তু মৌলিক সমাধান (Basic solution) নয়।

- (c) Find the extreme points, if any of the set $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$.

সেট $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ -এর কোনো চরম বিন্দুসমূহ (extreme points) থাকলে তা বের কর।

- (d) Verify graphically whether the following L.P.P. has a bounded or unbounded solution:

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Subject to } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$\text{and } x_1, x_2 \geq 0$$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P.)-টির সীমাবদ্ধ বা সীমাহীন সমাধান (Bounded or unbounded solution) আছে কিনা যাচাই করঃ

$$\text{সর্বাধিক (Maximize) } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{-এর সাপেক্ষে (Subject to) } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$\text{এবং } x_1, x_2 \geq 0$$

- (e) Show that whatever may be the value of λ , the game with the following payoff matrix is strictly determinable:

$$\begin{array}{c} \text{Player-A} \\ \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Player-B} \end{array}$$

দেখাও যে λ -এর যেকোন মানের জন্য নিম্নলিখিত পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (Payoff matrix) বিশিষ্ট খেলা (Game) কঠোরভাবে নির্ধারণযোগ্য (Strictly determinable):

$$\begin{array}{c} \text{খেলোয়াড়-B} \\ \text{খেলোয়াড়-A} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer all the following questions

12×3=36

নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) A firm manufacturing two types of medicine A and B, can make a profit of Rs. 20 per bottle of A and Rs. 30 per bottle of B. Both A and B need for their production two essential chemicals C and D. Each bottle of A requires 3 litres of C and 2 litres of D and each bottle of B requires 2 litres of C and 4 litres of D. The total supply of these chemicals are 210 litres of C and 300 litres of D. Type B medicine contains alcohol and its manufacture is restricted to 65 bottles per month. How many bottles each of A and B should the firm manufacture per month to maximize its profit of the products? Formulate the problem as a Linear Programming Problem and solve it graphically. 4+3

একটি প্রস্তুতকারী সংস্থা দুই প্রকার ওষুধ A এবং B তৈরী করে, প্রত্যেক বোতল A-তে 20 টাকা এবং প্রত্যেক বোতল B-তে 30 টাকা লাভ করে। উভয় A এবং B তৈরীর জন্য দুটি প্রয়োজনীয় রাসায়নিক C এবং D প্রয়োজন। প্রত্যেক বোতল A-এর জন্য 3 লিটার C এবং 2 লিটার D এবং প্রত্যেক বোতল B-এর জন্য 2 লিটার C এবং 4 লিটার D প্রয়োজন। C রাসায়নিকের মোট জোগান 210 লিটার এবং D রাসায়নিকের মোট জোগান 300 লিটার। B ওষুধে অ্যালকোহল আছে এবং তার উৎপাদন প্রত্যেক মাসে 65 বোতল পর্যন্ত সীমিত। সংস্থাটিকে সর্বাধিক লাভের জন্য কত বোতল A এবং B তৈরী করতে হবে? সমস্যাটিকে একটি রৈখিক কার্যকারী সমস্যা (Linear Programming Problem) হিসাবে তৈরী কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে তা সমাধান কর।

- (b) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$ is a feasible solution to the set of equations $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$. Reduce the feasible solution to one or more basic feasible solutions. 5

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$ সমীকরণ সেট $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$ -এর সম্ভাব্য সমাধান (Feasible solution)। সম্ভাব্য সমাধানটিকে এক বা অধিক মৌলিক সম্ভাব্য সমাধানে (Basic feasible solution) সংকুচিত (reduce) কর।

3. (a) Solve the following L.P.P using Simplex method: 6

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{Subject to} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7, \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P)-টি সমাধান কর সরলীকৃত পদ্ধতিতে (Simplex method):

$$\begin{aligned} \text{সর্বনিম্ন (Minimize)} \quad & z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{-এর সাপেক্ষে (Subject to)} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7, \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Find the optimal solution of the following transportation problem. 6

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির (transportation problem) অনুকূল সমাধান (optimal solution) বের করঃ

	D₁	D₂	D₃	D₄		a_i
	8	9	6	3	O₁	18
	6	11	5	10	O₂	20
	3	8	7	9	O₃	18
b_j	15	16	12	13		

4. (a) In a game of matching coins with two players, suppose A wins one unit of value when there are two heads, wins nothing when there are two tails and losses 1/2 unit of value when there are one head and one tail. Determine the payoff matrix, the best strategies for each player and the value of the game to A. 5

দুইজন খেলোয়াড় নিয়ে খেলা মুদ্রা মেলানোর খেলায়, ধর A এক অঙ্ক (1 unit) জিতে যখন সেখানে দুটি হেড (Head), কিছুই জিতে না যখন সেখানে দুটি টেল (tails) এবং অর্ধেক অঙ্ক হারে (loses 1/2 unit) যখন সেখানে একটি হেড এবং একটি টেল। পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (payoff matrix) নির্ণয় কর, প্রত্যেক খেলোয়াড়ের সেরা কৌশল (best strategies) এবং A-এর প্রতি খেলার মান নির্ণয় কর।

(b) Use Big-M method solve the following L.P.P: 7

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = x_1 + 5x_2 \\ \text{Subject to} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

বিগ-এম পদ্ধতি (Big-M method) ব্যবহার করে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P) সমাধান করঃ

$$\begin{aligned} \text{সর্বাধিক (Maximize)} \quad & z = x_1 + 5x_2 \\ \text{-এর সাপেক্ষে (Subject to)} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer all the following questions

7×2 = 14

নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও

5. (a) Solve the following Assignment Problem: 5

নিম্নলিখিত অর্পিত সমস্যার (assignment Problem) সমাধান করঃ

	I	II	III	IV	
	5	3	1	8	A
	7	9	2	6	B
	6	4	5	7	C
	5	7	7	6	D

(b) Solve graphically the following Game: 2

$$\begin{array}{c} \text{Player-B} \\ \text{Player-A} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

নিম্নলিখিত খেলাটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করঃ

$$\begin{array}{c} \text{খেলোয়াড়-B} \\ \text{খেলোয়াড়-A} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Show that the following L.P.P: 7

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

Subject to $-2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$3x_1 + 2x_2 \leq 9$

and $x_1, x_2 \geq 0$

has an infinite number of solutions. Justify your answer.

দেখাও যে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P):

সর্বাধিক (Maximize) $z = 6x_1 + 4x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to) $-2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$3x_1 + 2x_2 \leq 9$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$

-এর অসংখ্য সমাধান আছে। উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

—x—