



‘समानो मन्त्रः समितिः समानी’

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 2nd Semester Examination, 2022

DSC1/2/3-P2-MATHEMATICS

ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer any *four* questions from the following

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

তল দিহ্নএকো প্রহনহরুৰাট কুনৈ চার কো উত্তর লেখ

1. Find the nature of the roots of the equation $x^6 + x^4 + x^2 + 2x = 0$; by using Descartes rule of signs. 3
 ‘Descartes’ চিহ্ন বিষয়ক নিয়মের সাহায্যে $x^6 + x^4 + x^2 + 2x = 0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় কর।
 Descartes চিহ্নকো নিয়ম প্রয়োগ গরি সমিকরণ $x^6 + x^4 + x^2 + 2x = 0$ কো মূল (root) কো প্রকৃতিকো খোজ্ গর।
2. If λ be an eigen value of a real orthogonal matrix A , prove that $1/\lambda$ is also an eigen value of A . 3
 যদি একটি বাস্তব লম্ব ম্যাট্রিক্স (orthogonal matrix) A -এর আইগেন মান (eigen value) λ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A ম্যাট্রিক্সটির $1/\lambda$ একটি আইগেন মান (eigen value) হবে।
 যদি বাস্তবিক অর্থোগোনল্ ম্যাট্রিক্স A কো eigen মূল্য λ গএ $1/\lambda$ পনি A কো eigen মূল্যহো ভনি প্রমাণ গর।
3. Prove that sum of the 99th powers of the roots of the equation $x^7 = 1$ is 0. 3
 প্রমাণ কর যে, $x^7 = 1$ সমীকরণের সকল বীজগুলির 99 তম ঘাতের সমষ্টি শূন্য হবে।
 সমিকরণ $x^7 = 1$ কো মূল কো 99th বর্গ (powers) 0 হো ভনি প্রমাণ গর।

4. Find the rank of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।}$$

$$\text{ম্যাট্রিক্স } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ কো rank নিকাল।}$$

5. Show that the mapping $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ is bijective. 3

দেখাও যে, $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ অপেক্ষকটি bijective, যেখানে $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ ।

$f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা পরিभाषিত ম্যাপিং $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ bijective হো মনী প্রমাণ কর।

6. Examine if the relation ρ on \mathbb{Z} is an equivalence relation, 3
where $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3a + 4b \text{ is divisible by } 7\}$.

$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3a + 4b, 7 \text{ দ্বারা বিভাজ্য}\}$, অথগু সংখ্যার সেট \mathbb{Z} -এর উপর সমার্থতা সম্পর্ক (equivalence relation) হবে কিনা যাচাই কর।

\mathbb{Z} মা সম্বন্ধ $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3a + 4b \text{ লাই } 7 \text{ লে भाग जान्त ?}$ সমানতা সম্বন্ধ (equivalence relation) হো তা হোइन जांच गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer any four questions from the following

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

तल दिइएको प्रश्नहरूबाट कुनै चार को उत्तर लेख

7. Prove that an equivalence relation ρ on a set S determines a partition of S . Conversely, each partition of S yields an equivalence relation on S . 6

প্রমাণ কর যে, একটি সেট S -এর উপর আরোপিত সমার্থতা সম্পর্ক ρ (equivalence relation) সেট S টির বিভাজন (partition) নির্ধারণ করে। বিপরীতভাবে, একটি সেট S -এর প্রতিটি বিভাজন (partition) সেট S -এর উপর আরোপিত সমার্থক সম্পর্ক (equivalence relation) প্রদান করে।

Set S মা भएको समानता सम्बन्धले S को विभाजन निर्धारण गर्छ अनि उल्टो, S मा भएको विभाजनले S मा समानता सम्बन्ध उपज गर्छ मनी प्रमाण गर।

8. (a) State the De Moivre's theorem. 2

De Moivre's উপপাদ্যটি বিবৃত কর।

De Moivre's উপপাদ্য উল্লেখ কর।

(b) If $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$, then show that $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$. 4

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$ ।

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ হয় প্রমাণ কর $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$ ।

9. Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following matrix. 6

নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মানগুলি (eigen values) এবং এই মানগুলির সম্পর্কিত আইগেন ভেক্টর (eigen values)-গুলি নির্ণয় করঃ

दिइएको म्याट्रिक्स को eigen मूल्य अनि अनुरूप eigen भेक्टर खोज् गर।

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Solve the equation by Ferrari's method by $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$. 6

$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$ সমীকরণটিকে Ferrari-এর পদ্ধতিতে সমাধান কর।

Ferrari's को विधि द्वारा समिकरण $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$ को मान् निकाल।

11. If a, b, c be all positive real numbers and $abc = k^3$, then prove that $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+k)^3$. 6

যদি a, b, c সকলেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $abc = k^3$, তাহলে প্রমাণ কর যে, $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+k)^3$ ।

যদি a, b, c সবই একায়াত্মক বাস্তবিক সংখ্যহর্ হয় অনি $abc = k^3$ প্রমাণ কর $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+k)^3$ ।

12. Show that the equation $\tan\left(i \log \frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$ represents the rectangular hyperbola 6

$x^2 - y^2 = xy$.

দেখাও যে, $\tan\left(i \log \frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$ সমীকরণটি $x^2 - y^2 = xy$ আয়তক্ষেত্রাকার অধিবৃত্তকে (rectangular hyperbola) উপস্থাপনা করে।

সমিকরণ $\tan\left(i \log \frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$ লে আয়তাকার হাইপারবোলা $x^2 - y^2 = xy$ প্রতিনিধিত্ব কর্ত্ত মনী প্রমাণ কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

तल दिइएको प्रश्नहरूबाट कुनै दुईको उत्तर लेख

13.(a) Determine k and solve the equation if the roots are in A.P. 6

$$x^4 - 8x^3 + kx^2 + 8x - 15 = 0$$

k -এর মান নির্ণয় কর এবং নিম্নলিখিত সমীকরণটির সমাধান কর যদি সমীকরণটির বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে (A.P.) থাকে $x^4 - 8x^3 + kx^2 + 8x - 15 = 0$ ।

সমীকরণ $x^4 - 8x^3 + kx^2 + 8x - 15 = 0$ বাট k কো মান নিকাল অনি যদি মূলহরু A.P. মা भए त्यसको समाधान पनि गर।

(b) Use De Moivre's theorem to prove that 6

De Moivre's উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ করঃ

De Moivre's কো উপপাদ্য প্রয়োগ গরী প্রমাণ गर

$$\tan 5\theta = \frac{5 \tan \theta - 10 \tan^3 \theta + \tan^5 \theta}{1 - 10 \tan^2 \theta + 5 \tan^4 \theta}.$$

14.(a) Let $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ be both bijective mappings. Then prove that the mapping $g \circ f: A \rightarrow C$ is invertible and $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. 6

ধরা যাক, $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ উভয়ই bijective অপেক্ষক। তাহলে প্রমাণ কর যে, $g \circ f: A \rightarrow C$ একটি বিপরীত অপেক্ষক (invertible mapping) হবে এবং $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ।

যদি $f: A \rightarrow B$ অনি $g: B \rightarrow C$ দুই bijective ম্যাপিক भए प्रमाण गर, कि म्यापिङ $g \circ f: A \rightarrow C$ invertible हो भनी अनि $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ।

(b) (i) If $a \equiv b \pmod{m}$ then $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ for all integer n . Is the converse of this statement true? Justify your answer. 3+3

n -এর সকল পূর্ণসংখ্যার জন্য যদি $a \equiv b \pmod{m}$ হয়, তাহলে $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ হবে। বিপরীত বিবৃতিটি কী সত্য? তোমার উত্তরের যথাযথতা যাচাই কর।

যদি $a \equiv b \pmod{m}$ भए प्रमाण गर $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ सबै पूर्णांक n को लागी। माथिको वाक्यको उल्टो के सत्य हो? आफ्नो उत्तरको न्यायोचित गर।

(ii) Prove that if $ax \equiv ay \pmod{m}$ and a is prime to m then $x \equiv y \pmod{m}$.

যদি $ax \equiv ay \pmod{m}$ এবং a ও m পরস্পর মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x \equiv y \pmod{m}$ ।

যদি $ax \equiv ay \pmod{m}$ অনি a র m prove भए प्रमाण गर $x \equiv y \pmod{m}$ ।

- 15.(a) Determine the condition for which the system of equation has (i) unique solution, (ii) no solution, (iii) many solutions. 6

নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের

(ক) একটি মাত্র সমাধান আছে (খ) কোন সমাধান নেই (গ) একাধিক সমাধান আছে ক্ষেত্রে শর্তগুলি উল্লেখ কর।

নিম্নলিখিত সমীকরণহরুको प्रणाली

(i) अद्वितीय (unique) समाधान, (ii) समाधान छैन, (iii) थुप्रै समाधान, छ भने सर्तहरू निर्धारण गर।

$$\begin{aligned}x + y + z &= b \\2x + y + 3z &= b + 1 \\5x + 2y + az &= b^2\end{aligned}$$

- (b) Solve the equation by Cardan's method: $x^3 - 12x + 65 = 0$ 6

$x^3 - 12x + 65 = 0$ সমীকরণটিকে Cardan-এর পদ্ধতিতে সমাধান কর।

Cardan को विधि द्वारा समाधान निकाल: $x^3 - 12x + 65 = 0$

- 16.(a) If x, y, z are positive real numbers and $x + y + z = 1$. Prove that 6

$$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq 8/27$$

যদি x, y, z তিনটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x + y + z = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq 8/27।$$

যদি x, y, z সকারাত্মক বাস্তবিক সংখ্যাহরু हो अनि $x + y + z = 1$ हो भने, $8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq 8/27$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (b) Using Cayley-Hamilton theorem find A^{50} if $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 6

Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি ব্যবহার করে A^{50} -এর মানটি নির্ণয় কর যেখানে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ।

যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ हो भने, Cayley-Hamilton উপপাদ্য প্রয়োগ গरी A^{50} खोज।

—x—