



'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2022

DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

D. E. AND VECTOR CALCULUS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer any four questions

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কোন চার প্রশ্নহরুको उत्तर लेख

1. Show that the solutions of the differential equation $y'' - 2y' + 2y = 0$ are linearly independent.

দেখাও যে $y'' - 2y' + 2y = 0$ অবকল সমীকরণটির সমাধানগুলি linearly independent.

বিভেদক (Differential) সমীকরণমা $y'' - 2y' + 2y = 0$ को समाधानहरू रेखीय रूपमा (linearly) स्वतन्त्र छ भनी प्रमाण गर।

2. Find the particular integral of the differential equation $y'' + y = \sin 2x$.

Particular Integral-বের কর $y'' + y = \sin 2x$ -অবকল সমীকরণটির জন্য।

বিভেদক সমীকরণ $y'' + y = \sin 2x$ को विशेष integral নির্ণয় गर।

3. Find the Wronskian of the set $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ -সেটের Wronskian নির্ণয় কর।

Set $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ को Wronskian নির্ণয় गर।

4. Find the order and degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \sin\left(y\frac{dy}{dx}\right) = 0$.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \sin\left(y\frac{dy}{dx}\right) = 0$ -অবকল সমীকরণটি ক্রম (order) ও ঘাত (degree) নির্ণয় কর।

বিভেদক সমীকরণ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \sin\left(y\frac{dy}{dx}\right) = 0$ को क्रम अति डिग्री निर्णय गर।

5. If $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ are linearly independent, then show that $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$ are also linearly independent.

যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ linearly independent হয়, তাহলে দেখাও $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$ -ও linearly independent হবে।

যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ রেখীয় রূপমা স্বতন্ত্র ছ মনে $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$ পনি রেখীয় রূপমা স্বতন্ত্র ছ মনী প্রমাণ গর।

6. If $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ and $\vec{V} \times \vec{B} = \vec{0}$, then show that $\vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$.

যদি $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ এবং $\vec{V} \times \vec{B} = \vec{0}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$ হবে।

যদি $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ অনি $\vec{V} \times \vec{B} = \vec{0}$ মনে প্রমাণ গর $\vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$ ।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer any four questions

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কুনৈ চার প্রশ্নহরুকা উত্তর লেখ

7. Solve the following system of linear differential equation using operator $D \equiv \frac{d}{dx}$. 6

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$$

নিম্নের অবকল সমীকরণের জোড়টি সমাধান কর, $D \equiv \frac{d}{dx}$ অপারেটরের সাহায্যে।

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$$

তল দিহ্রুকা বিম্বদক সমিকরণকা প্রণালী

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$$

কা সমাধান নির্ণয় গর। (অপারেটর $D \equiv \frac{d}{dx}$ প্রয়োগ গর।)

8. Solve by the method of undetermined coefficients 6

$$(D^2 + 6D + 9)y = 24e^{-3x}, \quad \text{where } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Method of undetermined coefficient-এর সাহায্যে সমাধান করঃ

$$(D^2 + 6D + 9)y = 24e^{-3x}, \quad \text{যেখানে } D \equiv \frac{d}{dx}$$

Undetermined coefficients বিধি প্রয়োগ গরী সমাধান গর :

$$(D^2 + 6D + 9)y = 24e^{-3x}, \quad D \equiv \frac{d}{dx}$$

9. Solve the differential equation by the method of variation of parameters 6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\sec^2 2x$$

Method of variation of parameter-এর সাহায্যে সমাধান কর: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\sec^2 2x$

variation of parameters বিধি দ্বারা বিভেদক সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\sec^2 2x$ को समाधान गर।

10. Solve: / সমাধান করঃ / সমাধান কর : 6

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 2y = \cos(\log x)$$

- 11.(a) Prove that $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$. 3

প্রমাণ কর যে, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$.

প্রমাণ কর : $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$.

- (b) Suppose $\vec{A} = \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. Find $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$. 3

ধর $\vec{A} = \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, তাহলে $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{A} = \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ भए, $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$ को मान निर्णय गर।

12. If the position vectors of A , B , C are $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ respectively, find a vector perpendicular to the plane ABC . 6

A , B ও C -এর position vector যথাক্রমে $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$, তাহলে ABC - তলের লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর।

यदि A , B , C भेक्टरहरूको position vector क्रमै स्पले $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ भए समतल (plane) ABC मा लम्बवत भेक्टरको निर्णय गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

- 13.(a) Solve $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3$, given that $y = x$, $y = xe^x$ are two linear independent solutions of that corresponding homogeneous equation. 6

সমাধান করঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3$, দেওয়া আছেঃ $y = x$, $y = xe^x$ দুটি linear independent সমাধান homogeneous সমীকরণটির।

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3$ को समाधान गर। दिइएको छ, $y = x$, $y = xe^x$ त्यस समीकरणको अनुरूप homogeneous समीकरणको रेखोय रूपमा स्वतन्त्रीत समाधानहरू हो।

(b) Find the general solutions of the differential equation.

6

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10(x + x^{-1})$$

সাধারণ সমাধান (general solution) নির্ণয় করঃ $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10(x + x^{-1})$

বিভেদক সমীকরণ $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10(x + x^{-1})$ को सामान्य (general) समाधान निर्णय गर।

14.(a) Show that linearly independent solutions of $y'' - 2y' + 2y = 0$ are $e^x \sin x$ and $e^x \cos x$. What is the general solution? Find the solution $y(x)$ with the conditions $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

6

দেখাও যে, $y'' - 2y' + 2y = 0$ অবকল সমীকরণের দুটি linearly independent solution যথাক্রমে $e^x \sin x$ ও $e^x \cos x$ । সমীকরণটির সাধারণ সমাধান কি? $y(0) = 2$ ও $y'(0) = -3$ শর্তে অবকল সমীকরণের সমাধান $y(x)$ নির্ণয় কর।

$y'' - 2y' + 2y = 0$ को रेखीय रूपमा स्वतन्त्र समाधानहरू $e^x \sin x$ अनि $e^x \cos x$ हो भनी पमाण गर। यसकी सामान्य समाधान के हुन्छ ? यदि $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ सर्तहरू दिइए $y(x)$ को समाधान निर्णय गर।

(b) Show that if y_1 and y_2 be solutions of the equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, where P and

6

Q are functions of x alone and $y_2 = y_1 z$, then $z = 1 + ae^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$ (a is an arbitrary constant).

যদি y_1 ও y_2 দুটি সমাধান হয় $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ অবকল সমীকরণটির, যেখানে P ও Q শুধু x -এর

অপেক্ষক, এবং যদি $y_2 = y_1 z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $z = 1 + ae^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$ (a -একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক)।

যদি y_1 अनि y_2 समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ को समाधान हरू भए, जहाँ P अनि Q x को भए function भए अनि $y_2 = y_1 z$ भए,

$z = 1 + ae^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$ भनी प्रमाण गर। (a एउटा मनमानी स्थिर arbitrary constant हो)

15.(a) Solve by the method of differentiation

6

$$\frac{dx}{dt} = 7x - y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 5y$$

Method of differentiation-এর দ্বারা সমাধান কর:

$$\frac{dx}{dt} = 7x - y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 5y$$

Differentiation विधि ले समाधान गर

$$\frac{dx}{dt} = 7x - y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 5y$$

(b) Show that $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$. 6

দেখাও যে, $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$

প্রমাণ কর : $\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$

16.(a) Evaluate: $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{t} \hat{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \hat{j} + e^{1-t} \hat{k} \right]$ 4

মান নির্ণয় করঃ $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{t} \hat{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \hat{j} + e^{1-t} \hat{k} \right]$

$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{t} \hat{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \hat{j} + e^{1-t} \hat{k} \right]$ কো মান নির্ণয় কর।

(b) Find the co-ordinates of the point where the line $\vec{r} = t\hat{i} + (1 + 2t)\hat{j} - 3t\hat{k}$ intersects the plane $3x - y - z = 2$. 4

$\vec{r} = t\hat{i} + (1 + 2t)\hat{j} - 3t\hat{k}$ -রেখাটি $3x - y - z = 2$ তলে যে বিন্দুতে অন্তর্চ্ছেদ করে, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

রেখা $\vec{r} = t\hat{i} + (1 + 2t)\hat{j} - 3t\hat{k}$ লো সম্মল $3x - y - z = 2$ লাই প্রতিচ্ছদন (intersect) গর্চ মনে ত্যম বিন্দুকো co-ordinates নির্ণয় কর।

(c) Show that $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ vectors are coplanar. 4

দেখাও যে $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ ও $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয়।

ভেক্টর হরু $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ coplanar চ্ত মনী প্রমাণ কর।

—x—